

DISS. ETH No. 18069

Generalized Newton-type methods for nonsmooth equations  
in optimization and complementarity problems

A dissertation submitted to the

ETH ZURICH

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

STEPHAN BÜTIKOFER

dipl. math., University of Basel

born October 27, 1974

citizen of Hindelbank, Bern

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Hans-Jakob Lüthi, examiner

Prof. Dr. Diethard Klatte, co-examiner

Prof. Dr. Jie Sun, co-examiner

2008

# Zusammenfassung

Mehrere Fragestellungen aus der Variationsrechnung, wie zum Beispiel notwendige Optimalitätsbedingungen für nichtlineare Programme, Lösungen von Variationsungleichungen mit expliziten Gleichungs- bzw. Ungleichungsnebenbedingungen und Lösungen von nichtlinearen Komplementaritätsproblemen, können durch eine Reformulierung als Gleichung oder verallgemeinerte Gleichung analysiert und gelöst werden.

Die so entstandenen Gleichungen sind oft nichtglatt, obwohl das Originalproblem durch glatte Funktionen beschrieben ist. Deshalb benötigt man Methoden, die mit nichtglatten Daten umgehen können.

In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf Gleichungen, die durch speziell gegliederte lokale Lipschitzfunktionen definiert sind, die sogenannten verallgemeinerten Kojima Funktionen. Die spezielle Gliederung dieser Funktionen ist geeignet um verschiedene verallgemeinerte (Richtungs-) Ableitungen zu beschreiben und auszurechnen.

Damit kann man für die Lösung der zugehörigen Lipschitzgleichung Newton-typ Methoden (sogenannte nichtglatte Newton Methoden) entwickeln.

Diese Arbeit besteht aus drei Hauptteilen: Der Bestimmung einer geeigneten lokalen Newton Methode, der Globalisierung dieser Methode und der Anwendung bzw. numerischen Tests der globalisierten Methode.

In einem ersten Teil führen wir verallgemeinerte Kojima Funktionen und verschiedene verallgemeinerte Ableitungen ein. Wir berechnen diese verallgemeinerten Ableitungen für Kojima Funktionen und erhalten exakte Formeln. Diese Formeln sind im Speziellen nützlich für unsere Hauptanwendungen, die ihren Ursprung in nichtlinearen Programmen mit nur einmal differenzierbaren Daten haben.

Wir arbeiten mit einer lokalen nichtglatten Newton Methode, die in dieser Art von Bernd Kummer eingeführt wurde. Diese Methode kann verschiedene verallgemeinerte Ableitungen handhaben und lässt inexakte Lösungen der Newtongleichung zu. Die abstrakten Konvergenzbedingungen sind für verallgemeinerte Kojima Funktionen ausgearbeitet.

In einem zweiten Teil beschreiben wir in einem allgemeinen Rahmen eine Globalisierung dieser lokalen Methode durch eine Pfadsuche mit Backtracking.

Wir diskutieren und analysieren die Gründe eines allfälligen vorzeitigen Abbruchs der globalisierten Methode. Unter der Annahme der Zulässigkeit geben wir eine globale Konvergenzaussage an. Und zeigen, dass die globalisierte Methode dieselben lokalen Konvergenzeigenschaften hat wie die lokale Methode.

Wir präsentieren ausserdem eine Modifizierung der globalisierten Methode, welche die Anbindung eines geeigneten Verfahrens erster Ordnung ermöglicht.

Der dritte Teil beschäftigt sich mit den Anwendungen der globalisierten Methode und numerischen Tests. Wir präzisieren die einzelnen Schritte unserer Methode für

endlich dimensionale Optimierungsprobleme und nichtlineare Komplementaritätsprobleme. Die numerischen Resultate für Testprobleme aus dem Gebiet der (verallgemeinerten) semi-infiniten Optimierung bzw. der nichtlinearen Komplementaritätsproblemen sind sehr zufriedenstellend. Sie bestätigen die theoretischen Konvergenzresultate, die wir im zweiten Teil hergeleitet haben.

# Abstract

Several problems in variational analysis for e.g. necessary optimality conditions for nonlinear programs, solutions of variational inequalities with explicit equality/inequality constraints and nonlinear complementarity problems, can be analyzed and solved by reformulating the original problem as an equation or generalized equation (inclusion). However, even if the original problem is completely described by smooth functions, nonsmoothness of the resulting equation may appear in a very natural way. This requires methods, which may handle nonsmoothness. The focus of this work is on equations defined by locally Lipschitz functions having a special structure, the so called generalized Kojima functions. This structure is suitable to describe and compute standard generalized (directional) derivatives and to develop generalized Newton-type methods (so called nonsmooth Newton methods) for solving the related Lipschitz equation.

This work is divided in three parts: The identification of a suited local nonsmooth Newton method, the globalization of this method and the application and numerical testing of the globalized method.

In a first part we review the class of generalized Kojima functions and different generalized derivatives. We compute these generalized derivatives for generalized Kojima functions and obtain exact formulas, especially for our main application class resulting from nonlinear programs with data, which are not twice differentiable, but differentiable with locally Lipschitzian derivative.

We consider a local nonsmooth Newton method introduced by Bernd Kummer, which can handle different generalized derivatives and allows inexact solutions of the Newton equation. We work out the abstract convergence conditions from this method for generalized Kojima functions.

In a second part a globalization of this local method by a path search with non-monotone backtracking is described in a rather general framework. We discuss and analyze the causes for a possible premature termination. Under the assumptions of feasibility we give a global convergence theorem. We show that the globalized method inherits the convergence properties from the local Newton method.

We also present a modification of the globalized method, which enables the integration of a suited first order method.

A third part is devoted to the applications and numerical testing of the globalized method. We specify the single steps of our method for finite dimensional optimization problems and complementarity problems. The numerical results on a set of test problems from (generalized) semi-infinite optimization and nonlinear complementarity problems are very satisfying. They confirm the theoretical convergence results derived in the second part.