Diss. ETH No. 12770

EIGENVALUE ESTIMATES FOR THE LAPLACE OPERATOR

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
GIOVANNI GENTILE
Dipl. Math. ETH
born May 14, 1966 in CH - Winterthur
citizen of Switzerland

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Giovanni Felder, Examiner
Prof. Dr. Bruno Colbois, Co-Examiner and Adviser

1998

Abstract

Let (M^n, g) be a compact, connected Riemannian manifold of dimension n, without boundary. The Laplacian $\Delta_{g,p}$ acting on differential forms of degree p on M has discrete spectrum. Let $\lambda_{1,p}(g)$ denote the smallest positive eigenvalue of $\Delta_{g,p}$. There has been a considerable amount of work devoted to estimating the first nonzero eigenvalue in terms of other geometric and topological quantities associated to M.

In this thesis we investigate the existence of a universal (i.e. not depending on the metric) upper bound $k(M)$ on $\lambda_{1,p}(g)$ of the form:

$$\lambda_{1,p}(g)\mathrm{Vol}(M^n, g)^{2/n} \leq k(M). \tag{1}$$

J. Hersch [30] proved in 1970 that for functions on S^2 the above inequality holds with $k(M) = 8\pi$, i.e

$$\lambda_{1,0}(g)\mathrm{Vol}(S^2, g) \leq 8\pi$$

for every Riemannian metric g.
This result was generalized by P. Yang and S.-T.Yau [49] in 1980. They proved the above inequality for compact surfaces S of genus γ with $k(S) = 8\pi(\gamma + 1)$.

Between 1979 and 1983 a series of papers appeared showing that the inequality (1) does not hold for functions on every manifold (M, g). The authors constructed counterexamples for various types of manifolds of dimension $n \geq 3$: Spheres (Tanno [43]), manifolds with free circle actions or, more generally, manifolds admitting metrics with a unit Killing vector field (Bleecker [7]), compact Lie groups, homogeneous spaces (Urakawa [46]), and Riemannian submersions with totally geodesic fibres (Bergery and

Bourguignon [4]). Finally, it was proved by Y. Xu [48] in 1992 and by B. Colbois and J. Dodziuk [20] in 1994 that on any Riemannian manifold of dimension $n \geq 3$ the inequality (1) does not hold for functions.

Bounds of the form (1) can be obtained by restricting the class of manifolds (M, Ω). For the class Ω of all Kähler metrics on a complex manifold M whose Kähler form represents a given cohomology class, an upper bound for $\lambda_{1,0}(M, g)$, $g \in \Omega$ exists and it is related to the algebraic-geometric properties of M. This was discovered by P. Li and S.-T. Yau [33] and by J.-P. Bourguignon, P. Li and S.-T. Yau [10]. A similar estimate for closed symplectic manifolds with a special class of Kähler metrics on it, was given by L. Polterovich [38]. Thus, while upper bounds do not exist for arbitrary metrics, it is still possible to have such bounds for restricted classes of metrics.

Contrary to the case of functions no inequality of type (1) is known for differential forms of degree p with $p \geq 1$. In this thesis we show that no such bound is possible for any closed Riemannian manifold of dimension $n \geq 4$ and differential form of degree p with $2 \leq p \leq n-2$. The main tool to prove this is a generalization of a method by J. McGowan [31]. It allows us to estimate eigenvalues of p-forms on M in terms of eigenvalues of p-forms on parts of M. We explicitly construct a family of metrics of volume 1 such that $\lambda_{1,p}(g)$ can be made arbitrarily large. Therefore, no inequality of type (1) is possible.

The spectrum of functions is contained in the spectrum of 1-forms. Because of the Hodge-Decomposition Theorem the new part is given by the eigenvalues of coexact 1-forms. For 1-forms we prove an inequality of type (1) in a special class of 3-dimensional manifolds, namely S^1-bundles over 2-dimensional manifolds with adapted metrics.

Kurzfassung

Es sei (M^n, g) eine kompakte, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension n. Der Laplace Operator $\Delta_{g,p}$ auf Differentialformen vom Grade p auf M besitzt ein reines Punktspektrum, bestehend aus nichtnegativen Eigenwerten. Mit $\lambda_{1,p}(g)$ bezeichnen wir den kleinsten positiven Eigenwert von $\Delta_{g,p}$. Eine der wichtigsten Aufgaben in diesem Zusammenhang besteht darin, Abschätzungen für $\lambda_{1,p}(g)$ zu finden, welche von der Geometrie oder Topologie von M abhängen.

In dieser Arbeit untersuchen wir die Existenz einer universellen (d.h. nicht von der Metrik abhängenden) oberen Schranke $k(M)$ für $\lambda_{1,p}(g)$ der Form:

$$\lambda_{1,p}(g)\mathrm{Vol}(M^n, g)^{2/n} \leq k(M). \tag{1}$$

J. Hersch [30] bewies 1970, dass für Funktionen auf S^2 die obige Ungleichung mit $k(M) = 8\pi$ erfüllt ist, d.h.

$$\lambda_{1,0}(g)\mathrm{Vol}(S^2, g) \leq 8\pi$$

für jede Riemannsche Metrik g.
Dieses Resultat wurde 1980 von P. Yang und S.-T. Yau [49] verallgemeinert. Sie bewiesen die obige Ungleichung für kompakte Riemannsche Flächen S mit $k(S) = 8\pi(\gamma+1)$, wobei γ das Geschlecht von S bezeichnet.

Zwischen 1979 und 1983 erschien eine Reihe von Artikeln, die zeigten, dass für Funktionen eine Ungleichung der Form (1) nicht ohne weiteres auf höher dimensionale Mannigfaltigkeiten erweitert werden kann. Gegenbeispiele wurden für folgende Räume konstruiert: Sphären (Tanno [43]),

Mannigfaltigkeiten mit nicht verschwindenden Killingvektorfeldern (Bleecker [7]), kompakte Liegruppen, homogene Räume (Urakawa [46]) und Riemannsche Submersionen mit total geodätischer Faser (Bergery and Bourguignon [4]). Schliesslich bewiesen Y. Xu [48] 1992 und B. Colbois und J. Dodziuk [20] 1994, dass auf einer beliebigen geschlossenen Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ eine Familie von Metriken mit Volumen 1 existiert, bei der $\lambda_{1,p}(g)$ beliebig gross wird. Eine Ungleichung der Form (1) kann deshalb nicht gelten.

Schränkt man jedoch die Klasse der Metriken ein, so sind Ungleichungen vom Typ (1) möglich. Betrachtet man die Klasse Ω aller Kähler Metriken auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M, deren Kählerform eine gegebene Kohomologieklasse darstellt, so existiert eine obere Schranke für $\lambda_{1,0}(M,g)$, wobei g in Ω liegt. Diese Schranke hängt von den algebraisch-geometrischen Eigenschaften von M ab. Dies wurde von P. Li und S.-T. Yau [33] und von J.-P. Bourguignon, P. Li und S.-T. Yau [10] entdeckt. Im Falle wo M eine geschlossene symplektische Mannigfaltigkeit ist, versehen mit einer speziellen Klasse von Kähler Metriken, wurde ebenfalls eine obere Schranke gefunden (Polterovich [38]). Obwohl obere Schranken nicht für beliebige Metriken existieren, ist es möglich obere Schranken für spezielle Klassen von Metriken zu finden.

Für Differentialformen vom Grad $p \geq 1$ sind keine Ungleichungen der Form (1) bekannt. In dieser Arbeit zeigen wir, dass für eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) und Differentialformen vom Grad p mit $2 \leq p \leq n-2$ eine Schranke der Form (1) nicht existieren kann. Um dies zu beweisen, verallgemeinern wir eine Methode von J. McGowan [31]. Sie erlaubt uns Eigenwerte von p-Formen auf M durch Eigenwerte von p-Formen auf Teilen von M abzuschätzen. Mit diesem Resultat gelingt es zu zeigen, dass auf jeder geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 4$ und für p-Formen mit $2 \leq p \leq n-2$ eine Familie von Metriken mit Volumen 1 existiert, bei der $\lambda_{1,p}(g)$ beliebig gross wird. Eine Ungleichung der Form (1) kann deshalb nicht existieren.

Das Spektrum der Funktionen ist im Spektrum der 1-Formen enthalten. Aufgrund der Hodge-Zerlegung ist der Teil des Spektrums, welcher nicht von Funktionen stammt, durch die Eigenwerte der koexakten 1-Formen gegeben. Für eine spezielle Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten beweisen wir ein Ungleichung vom Typ (1) für 1-Formen.