DISS. ETH NO. 17410

CONSTRUCTING COMPACT COMPLEXES WITH CURVATURE BOUNDED FROM ABOVE USING MINIMAL SURFACES

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of

DOKTOR DER MATHEMATIK

presented by

Stéphane Félix

Dipl. Phys. EPF Lausanne

born 22.10.1976

citizen of La Rogivue (VD),
Switzerland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Urs LANG, examiner
Prof. Dr. Werner BALLMANN, co-examiner

2007

Abstract

This work is mainly concerned with the construction of new examples of spaces with curvature bounded from above in the sense of Alexandrov. In particular, new examples of CAT(0) spaces are constructed. Starting from a polytope P of constant curvature κ, our goal is to construct closed, compact, locally CAT(κ) spaces by gluing together isometric copies of P. This problem is solved generally up to dimension 3. Towards the case of dimension 4, some results concerning minimal surfaces in polyhedral complexes are proven. The main tools used in this work are the theory of complexes of groups, and the theory of energy-minimising surfaces in singular spaces.

The first chapter is devoted to a solution of the problem in dimension 3. The theory of complexes of groups is used here to encode a gluing rule for the copies of P. A central notion in this theory is called developability. A sufficient condition for developability is given by a theorem of Haefliger, which we use to construct a global gluing rule (given by a group), starting from local gluing rules.

The condition of having to glue only finitely many copies of P translates in terms of the global gluing rule into *residual finiteness*. This conditions says that every non-trivial element of the group is excluded by a normal group of finite index; in other terms, the group has a lot of finite quotients. The main result proved in this chapter is the residual finiteness of the group giving the global gluing rule, provided that the local gluing rules (the complex of groups) satisfy some combinatorial conditions. The first of these combinatorial conditions is called a *commutative family of retractions*, which postulates the existence of retractions along the groups constituting the complex of groups. The second condition, the *activity*, enables those groups to act in an appropriate way on finite sets constructed from the groups themselves.

Everything developed in this chapter holds for complexes of groups of arbitrary dimension, only a geometric argument involving the Gauss-Bonnet Theorem fails in higher dimension. In fact, the local gluing rules are constructed on complexes of groups of dimension one less than the dimension of P, and being on two-dimensional polyhedral complexes allows to apply the Gauss-Bonnet Theorem. For this very reason, if we want to extend the result in higher dimension,

we have to produce two-dimensional objects in polyhedral complexes, and area-minimising surfaces are good candidates for this. The purpose of the use of the theory of area-minimising surfaces is to force the existence of an upper curvature bound for the resulting gluing of copies of P.

The second chapter deals with energy- and area-minimising maps from a euclidean domain to a metric space, in particular a metric space with an upper curvature bound in the sense of Alexandrov. Its goal is to collect the known facts in this domain in order to apply it to our problem. We use the theory developed by Korevaar and Schoen. The main sources are as well an article of Gromov and Schoen, articles of Jost and of Mese. We consider in particular *blowup maps*, which are good tangent objects for energy-minimising maps, and capture nicely the infinitesimal behaviour of these maps.

The third chapter consists in results about energy- and area-minimising surfaces. Having in mind that the goal is to be able to apply a Gauss-Bonnet type argument, the Gauss curvature of such surfaces have to be better understood. The first result concerns the infinitesimal behaviour of area-minimising surfaces: it says in substance that blowups of an energy-minimising map are totally geodesic. Those maps are therefore quite regular. The second result is an "infinitesimal-to-local" statement: it concerns the very special situation where an area-minimising surface "goes along" an axis of a 3-dimensional spherical polyhedral complex, which is strongly "negatively curved". The theorem says, roughly, that this surface has to "stick along" the axis. Finally, we list the cases where we can estimate the Gauss curvature of an area-minimising surface, using the preceding results.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden neue Beispiele metrischer Räume mit oberen Krümmungsschranken im Sinne von Alexandrov konstruiert. Insbesondere werden neue CAT(0) Räume konstruiert. Es ist unser Ziel, gegeben ein Polytop P konstanter Krümmung κ, durch Verkleben mehrerer isometrischer Kopien des Polytops abgeschlossene, kompakte Räume zu konstruieren, die lokal CAT(κ) sind. Dieses Problem wird in allen Dimensionen kleiner gleich drei allgemein gelöst. Für eine Lösung des Problems in höheres Dimensionen werden einige Resultaten über Minimalflächen in polyhedrischen Komplexen bewiesen. Es werden hauptsächlich Methoden aus der Theorie der Gruppenkomplexe und der Theorie der Minimalflächen in singulären Räumen benutzt.

In ersten Kapitel wird das Problem in Dimension kleiner gleich drei gelöst. Die Theorie der Gruppenkomplexe wird benutzt, um eine Kleberegel für die Kopien des Polytops P zu erhalten. Eine wesentliches Konzept ist hierbei der Begriff der Entwickelbarkeit. Ein Theorem von Haefliger gibt eine hinreichende Bedingung für die Entwickelbarkeit eines Gruppenkomplexes. Dieses Theorem wird benutzt, um eine globale Kleberegel (gegeben durch eine Gruppe) aus lokalen Kleberegeln zu erhalten.

Der Bedingung, nur endlich viele Kopien von P zusammenkleben zu müssen, entspricht die *residuelle Endlichkeit* der globalen Kleberegel. Diese Bedingung besagt, dass es für jedes nicht-triviale Element der Gruppe, eine normale Untergruppe von endliches Index gibt, die dieses Element nicht enthält. Grob gesagt hat diese Gruppe dann viele endliche Quotienten. Als Hauptresultat wird hier gezeigt, dass unter bestimmten kombinatorischen Bedingungen für die lokalen Kleberegeln (den Gruppenkomplex), die Gruppe, die die globale Kleberegel gibt, residuell endlich ist. Die erste dieser kombinatorischen Bedingungen heisst *kommutative Familie von Retraktionen*, und vorlangt die Existenz von Retraktionen entlang der Gruppen des Guppenkomplex. Die zweite Bedingung, die *Aktivität*, stellt sicher dass diese Gruppen auf endliche Mengen, die aus den Gruppen selbst konstruiert sind, wirken.

Alles, was im ersten Kapitel entwickelt wird, gilt in jeder Dimension, bis auf ein geometrisches Argument, das den Satz von Gauss-Bonnet benutzt. Die lokale

Kleberegeln sind auf Gruppenkomplexen konstruiert, deren Dimension eins kleiner als die Dimension des Polytops P ist, und auf zwei-dimensionale Komplexen kann dann der Satz von Gauss-Bonnet angewandt werden. Wenn man das Problem in höheren Dimensionen betrachten möchte, muss man deswegen zwei-dimensionale Objekte in polyhedrische Komplexen finden, Minimalflächen sind gute Kandidaten hierfür. Die Theorie der Minimalflächen wird hier benutzt, um eine obere Krümmungsschranke für den Raum, der durch Verkleben der Kopien des Polytops P erhalten wird, zu erzwingen.

Im zweiten Kapitel geht es um flächen- und energieminimierende Abbildungen von einem euklidischem Bereich in einen metrischen Raum, insbesondere solche mit oberen Krümmungschranken im Sinne von Alexandrov. Das Ziel ist, Fakten über diese Theorie zusammenzustellen, und gegebenenfalls anzupassen, so dass sie auf unser Problem angewendet werden können. Wir benutzen die Theorie von Korevaar und Schoen. Quellen hierfür sind ein Artikel von Gromov und Schoen, und Artikel von Jost und von Mese. Wir betrachten insbesondere *blowup* Abbildungen, diese sind gute Tangentialobjekte zu energieminimierende Abbildungen.

Das dritte Kapitel besteht aus verschiedenen Resultaten über Minimalflächen und energieminimierende Flächen. Das Ziel ist hier, die Gauss-Bonnet Krümmung solcher Flächen besser zu verstehen, so dass wir den Satz von Gauss-Bonnet anwenden können. Das erste Resultat betrifft das infinitesimale Verhalten von Minimalflächen: es besagt dass blowups einer solchen Fläche total geodätisch sind. Diese Fläche sind deswegen sehr regulär. Das zweite Resultat ist eine "infinitesimal-nach-lokal" Aussage: es betrifft die sehr spezielle Situation, wenn eine Minimalfläche "entlang" einer "sehr negativ gekrümmten" Achse in einem dreidimensionalen polyhedrischen Komplex verläuft. Der Satz besagt dass die Fläche entlang dieser Achse "kleben" muss. Zum Abschluss betrachten wir die Fälle, in denen wir die Gausssche Krümmung einer Minimalfläche abschätzen können.