

UNTERSUCHUNGEN ÜBER KURZPERIODISCHE SCHWANKUNGEN DER HÄUFIGKEIT DER SONNENFLECKEN



Von der
Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

zur Erlangung der

Würde eines Doktors der Mathematik

genehmigte

Promotionsarbeit

vorgelegt von

Elsa Frenkel
aus Heiden (Kanton Appenzell)

Referent: Herr Professor Dr. A. Wolfer
Korreferent: Herr Professor Dr. A. Einstein



Separatabdruck aus
„Publikationen der Sternwarte des eidgenössischen Polytechnikums“ Band V



ZÜRICH
DRUCK VON SCHULTHESS & Co.
1913

Meinem hochverehrten Lehrer und Chef, Herrn Professor Dr. A. Wolfer,
Direktor der Eidgenössischen Sternwarte, danke ich herzlich für die
Anregung zu dieser Arbeit, für die Überlassung des ihr zu Grunde
liegenden Materials und für seine vielfachen gütigen Ratschläge.

Lebenslauf.

Ich, Elsa Frenkel wurde am 30. November 1888 im Schlosse Marbach am Bodensee geboren.

Primar- und Sekundarunterricht erhielt ich durch Privat-Lehrer. Vom März 1904 bis März 1908 besuchte ich die vier Klassen des Mädchengymnasiums Grossmünster in Zürich und bestand im April 1908 die Eidgenössische Maturitäts-Prüfung in Bern.

Während des Sommersemesters 1908 war ich an der Universität Zürich immatrikuliert. Im Herbst 1908 bestand ich die Aufnahmeprüfung in das Eidgenössische Polytechnikum (mathematisch-physikalische Abteilung). Im Oktober 1910 legte ich die Übergangsdiplom-Prüfung und Juli 1912 die Diplomprüfung ab (Diplom-Arbeit: Die Fehlergrenzen der Ångströmschen Bolometer-Methode zur Messung strahlender Wärme, Professor H. F. Weber). Seit September 1912 bin ich zweiter Assistent der Eidgenössischen Sternwarte (Direktor Professor Dr. A. Wolfer).

Zürich, Mai 1913.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER KURZPERIODISCHE
SCHWANKUNGEN DER HÄUFIGKEIT
DER SONNENFLECKEN



Leer - Vide - Empty

Einleitung.

Seit den Untersuchungen Wolfs über die periodische Veränderlichkeit des Sonnenfleckenphänomens, die sich über einen Zeitraum von nahe drei Jahrhunderten, nämlich von der Zeit der Entdeckung der Sonnenflecken bis auf die Neuzeit erstrecken, ist bekannt, dass diese Periodizität keineswegs einfach und regelmässig verläuft, sondern als eine Überlagerung mehrerer Perioden aufzufassen ist, von denen einige mit verhältnismässig grosser Sicherheit haben ermittelt werden können.

Die auffälligste und daher der Untersuchung am leichtesten zugängliche unter diesen ist die elfjährige, deren mittlere Dauer aus dem bis jetzt verfügbaren Zeitraume von verschiedenen Seiten und nach verschiedenen, von einander unabhängigen Methoden zu $11^{\text{a}}125$ bestimmt worden ist. Von diesem Mittelwerte weichen jedoch die aus den beobachteten Maxima und Minima hervorgehenden wahren Perioden um Beträge ab, die in einzelnen Fällen bis auf mehrere Jahre angestiegen sind und durch ihren augenscheinlich nicht ganz gesetzlosen Charakter in Verbindung mit ähnlichen Schwankungen der Amplituden auf die Annahme des gleichzeitigen Bestehens mehrerer Perioden nebeneinander geführt haben. So ist es A. Schuster gelungen neben der elfjährigen noch eine achtjährige und eine vierjährige festzustellen, deren genaue Dauer er zu $8^{\text{a}}344$ und $4^{\text{a}}788$ angibt (Phil. Transactions of the Royal Society of London 1906).

Ob solche übereinander gelagerte Teilperioden an sich selbst beständigen Charakter haben oder im Laufe der Zeit veränderlich sind, bleibt vorerst offene Frage. Im Falle des Sonnenfleckenphänomens kann auf Grund der bisherigen Erfahrungen das letztere als wahrscheinlicher gelten und dieser Umstand erschwert die Trennung der nebeneinander bestehenden Perioden und das Auffinden neuer beträchtlich, denn die Methoden, die uns dazu zur Verfügung stehen, setzen die Constanz der Periodenlänge voraus und sind auf variable nicht übertragbar. Andererseits können die im wesentlichen aufgefundenen Perioden infolge ihrer Inconstanz niemals vollkommen aus den Beobachtungsreihen eliminiert werden; und wenn auch solche Eliminationsversuche durch Herstellung der sogenannten „ausgeglichenen Reihen“ gemacht werden, so konnten sie bis jetzt höchstens dazu dienen, die bereits bekannten Perioden deutlicher hervortreten zu lassen. Die übrig bleibenden Oszillationen sind umso schwerer deutbar, als sie teilweise durch die mangelhafte Ausgleichung selbst verschuldet sind.

Neben dem langperiodischen Wechsel unterliegt nun aber das Fleckenphänomen auch noch sekundären Schwankungen von kurzer Periode und auch hier scheinen mehrere solche von verschiedener Dauer und Amplitude gleichzeitig nebeneinander zu bestehen. Eine von ihnen tritt mit aller Klarheit hervor, eine Periode von 26—29 Tagen und sie ist die einzige, für die auch eine Erklärung leicht zu geben ist; denn sie ist zurückzuführen auf die ungleiche Verteilung der Fleckenbildungen in heliographischer Länge, nämlich auf deren zeitweise Anhäufung an gewissen Stellen der Sonnenoberfläche während längerer Zeiträume und erscheint somit einfach als die natürliche Folge der Sonnenrotation, nicht aber als eine dem Fleckenphänomen selbst anhaftende Veränderlichkeit.

Dass aber kurzperiodische Schwankungen der letzteren Art ebenfalls vorhanden sind, erkennt man ohne Mühe aus hinreichend detaillierten Darstellungen der Fleckenhäufigkeit entweder in tabellarischer oder noch weit besser in graphischer Form, in denen durch die Wahl einer hinreichend kleinen Zeiteinheit diese Variationen nicht, wie es für die Aufsuchung der langen Perioden sich notwendig erweist, mehr oder weniger verwischt sind.

Im folgenden ist der Versuch gemacht, Periodizitäten dieser Art in der Stärke des Sonnenfleckenphänomens nachzuweisen und numerisch zu bestimmen, gestützt auf Beobachtungen auf der Zürcher Sternwarte, die sich über einen Zeitraum von 35 Jahren, nämlich von 1876—1911 erstrecken, und die in ihrem vollen Umfange diejenige Gleichartigkeit besitzen, die für den Zweck unerlässlich ist. Bis heute liegen noch keinerlei systematische Untersuchungen über dieselben vor. Einige Versuche von A. Schuster über Perioden von ca. zweijähriger Länge (Phil. Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 206) und Unterwegers „Untersuchung über die kleinen Perioden der Sonnen-Flecken und ihre Beziehung zu einigen periodischen Erscheinungen der Erde“ (LVIII. Band der Denkschriften der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien 1891), wobei er aus Beobachtungen von 1880—1887 eine Periode in der mittleren Länge von 69.4 Tagen angibt, sind auf diesem Gebiet bis jetzt allein geblieben.

Bevor wir aber dazu übergehen, die zur Ermittlung der Perioden angewandten Methoden zu beschreiben, soll nicht unerwähnt bleiben, dass so lange es der meteorologischen Dynamik noch nicht gelungen ist, die bei der Entstehung der Sonnenflecken stattfindenden physikalischen Vorgänge genauer festzustellen, als es zur Zeit der Fall ist, alle auf die Darstellung des zeitlichen Verlaufes des Phänomens gerichteten Bemühungen einstweilen noch den Charakter von — wenn auch methodisch geleiteten — Versuchen behalten müssen und dass aus diesem Grunde der schliessliche Erfolg oft genug in wenig befriedigendem Verhältnis zu dem erforderlichen Rechnungsaufwande steht.



I. Methoden zum Aufsuchen unbekannter Perioden.

Zum Auffinden unbekannter Perioden, d. h. zur Ermittlung ihrer Länge, Amplitude und Phase, stehen uns zwei prinzipiell verschiedene Wege offen, der direkte oder der indirekte. Im praktischen Falle kommt aus Gründen, die später deutlich hervortreten werden, wohl nur das indirekte Verfahren in Betracht. Doch besitzt die zuerst von Fr. Kühnen angegebene direkte „Methode zur Aufsuchung periodischer Erscheinungen in Reihen äquidistanter Beobachtungen“ (Astr. Nachr. Bd. 182, I, 1909) so grossen theoretischen Reiz, dass ihr Prinzip hier kurz angedeutet werden möge: $l_0, l_1, l_2, l_3, \dots$ bezeichnen die äquidistanten Beobachtungen des zu untersuchenden Phänomens in den Zeitmomenten $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$. Fassen wir diese als eine Überlagerung von n einzelnen Schwingungen auf, so sind sie eindeutig darstellbar durch die Fourierreihe:

$$(1) \quad l_t = C_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1) + C_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2) + \dots + C_n \cos(\alpha_n t + \beta_n).$$

Jede der Wellen hat die Form $C \cos(\alpha t + \beta)$.

C ist die Amplitude, β die Phase, $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ die Periodenlänge, $\frac{\alpha}{2\pi}$ die Frequenz.

Da n selbst unbekannt, so wird n zunächst durch die beliebige Zahl m ersetzt und die Beobachtungsreihe der l nach beiden Seiten von l_t unbeschränkt gedacht.

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Setzt man } A_\rho = C_\rho \cos \beta_\rho \\ \dots \dots \dots B_\rho = -C_\rho \sin \beta_\rho \end{array} \right\} \quad C_\rho = +\sqrt{A_\rho^2 + B_\rho^2} \quad \beta_\rho = \arctg\left(-\frac{B_\rho}{A_\rho}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha t = \frac{1}{2}(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}) \quad i = \sqrt{-1} \\ \sin \alpha t = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}) \quad \frac{1}{i} = -i \end{array} \right\}$$

Setzt man ferner $\frac{1}{2}(A_\rho - iB_\rho) = X_\rho$

$$(2') \quad \frac{1}{2}(A_\rho + iB_\rho) = Y_\rho, \text{ dann wird}$$

$$(3) \quad l_t = X_1 e^{i\alpha_1 t} + X_2 e^{i\alpha_2 t} + \dots + X_m e^{i\alpha_m t} + Y_1 e^{-i\alpha_1 t} + Y_2 e^{-i\alpha_2 t} + \dots + Y_m e^{-i\alpha_m t}$$

Die m auftretenden Werte von X und Y werden gefunden, indem man sie aus je $2m+1$ Gleichungen m mal eliminiert, so dass man zu ihrer Bestimmung m Gleichungen von der Form erhält:

$$(4) \quad 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & l_\rho \\ e^{i\alpha_1} & e^{i\alpha_2} & e^{i\alpha_3} & \dots & e^{i\alpha_m} & e^{-i\alpha_1} & e^{-i\alpha_2} & e^{-i\alpha_3} & \dots & e^{-i\alpha_m} & l_{\rho+1} \\ e^{i2\alpha_1} & e^{i2\alpha_2} & e^{i2\alpha_3} & \dots & e^{i2\alpha_m} & e^{-i2\alpha_1} & e^{-i2\alpha_2} & e^{-i2\alpha_3} & \dots & e^{-i2\alpha_m} & l_{\rho+2} \\ e^{i3\alpha_1} & e^{i3\alpha_2} & e^{i3\alpha_3} & \dots & e^{i3\alpha_m} & e^{-i3\alpha_1} & e^{-i3\alpha_2} & e^{-i3\alpha_3} & \dots & e^{-i3\alpha_m} & l_{\rho+3} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ e^{i2m\alpha_1} & e^{i2m\alpha_2} & e^{i2m\alpha_3} & \dots & e^{i2m\alpha_m} & e^{-i2m\alpha_1} & e^{-i2m\alpha_2} & e^{-i2m\alpha_3} & \dots & e^{-i2m\alpha_m} & l_{\rho+2m} \end{vmatrix}$$

gleichmässig fortschreiten, wiederholt, und durch Vergleichung der zugehörigen Amplituden wird dann auf das Vorhandensein wahrer Perioden geschlossen. Dieses Verfahren wird bei der Analyse periodischer Vorgänge am häufigsten angewandt. Die Untersuchung über die Wahrscheinlichkeit der zu erwartenden Amplituden, sowie das regelmässige Fortschreiten der Phase als Kennzeichen wahrer Perioden stammen grösstenteils von A. Schuster (Terrest. Magn. Vol. III, pag. 13 ff.), wir führen hier das wesentliche an:

Handelt es sich darum, die Amplitude und Phase einer vermuteten Periode T von p Intervallen zu finden, aus einer grossen Anzahl aequidistanter Beobachtungen $l_1 l_2 l_3 \dots$, so ordnen wir diese Beobachtungen in ein Schema von Horizontal- und Vertikal-Reihen so, dass die den Zeitabschnitten $t_1 t_2 \dots t_p$ entsprechenden Beobachtungen $l_1 l_2 \dots l_p$ horizontal nebeneinander zu stehen kommen, und eine erste Reihe bilden, die $t_{p+1} t_{p+2} \dots t_{2p}$ entsprechenden Werte l analog eine zweite Reihen usw., bis sämtliche Beobachtungen l erschöpft sind. $S_1 S_2 \dots S_p$ bedeuten dann die Summen der Vertikalreihen.

l_1	l_2	l_3	l_p
l_{p+1}	l_{p+2}	l_{p+3}	l_{2p}
l_{2p+1}	l_{2p+2}	l_{2p+3}	l_{3p}
.....
$l_{(n-1)p+1}$	$l_{(n-1)p+2}$	$l_{(n-1)p+3}$	l_{np}
S_1	S_2	S_3	S_p

S wird dann durch die Fouriersche Reihe allgemein dargestellt in der Form

$$(1) \quad S = a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos 2\alpha + a_3 \cos 3\alpha + \dots + a_p \cos p\alpha + b_1 \sin \alpha + b_2 \sin 2\alpha + b_3 \sin 3\alpha + \dots + b_p \sin p\alpha$$

und $S = S_i$ für $\alpha = \frac{2\pi i}{p}$; $i = 0, 1, 2, 3, \dots, p-1$

Wir behalten von der Reihe nur $S = a_0 + a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha$; $a_1 b_1$ sind dann gegeben durch

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} p a_1 &= S_1 \cos 0 + S_2 \cos 1 \cdot \alpha + S_3 \cos 2\alpha + \dots + S_p \cos (p-1)\alpha \\ \frac{1}{2} p b_1 &= S_1 \sin 0 + S_2 \sin 1 \cdot \alpha + S_3 \sin 2\alpha + \dots + S_p \sin (p-1)\alpha \\ p a_0 &= S_1 + S_2 + \dots + S_p \end{aligned} \right\}$$

Führen wir die Substitution ein

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} a_1 &= r_1 \cos \varphi \\ b_1 &= r_1 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ so wird } S = a_0 + r \cos(\alpha - \varphi)$$

Hierin bedeutet $r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ die Amplitude und $\varphi = \arctg \frac{b_1}{a_1}$ die Phase.

Ist so die Amplitude ermittelt, so muss nun entschieden werden, ob ihre Grösse die, bei willkürlicher Anordnung der Zahlen, nach der Wahrscheinlichkeit zu erwartende bedeutend übertrifft — nur in diesem Falle ist Grund vorhanden, die Existenz einer Periode von p Intervallen zu behaupten und durch weitere Näherung einen besseren Wert für sie zu suchen.

Die Methode zum auffinden des wahrscheinlichen Wertes der Amplitude stammt von Schuster. Sie stützt sich auf einen von Lord Rayleigh gefundenen Satz, den wir hier zuerst erläutern:

Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen von zwei entgegengesetzten Ereignissen heissen p und q . Die Ereignisse selbst A und B . Dann ist nach dem Theorem von Bernoulli die Wahrscheinlichkeit, dass in einer sehr grossen Anzahl von n Versuchen das Ereignis A in einer zwischen $np \pm \gamma \sqrt{2npq}$ liegenden, unbekanntem Anzahl von Malen eintritt gegeben durch P ,

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi npq}} \quad \left. \begin{aligned} \text{wo } \gamma &= r \sqrt{2n} \\ \text{und } r &\leq \sqrt{n} \end{aligned} \right\}$$

wenn n hinreichend gross gewählt wird, verschwindet das additive Glied und es bleibt

$$(4) \quad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt \quad \begin{array}{l} \gamma = r\sqrt{2n} \\ r \leq \sqrt{n} \end{array}$$

Von dieser Formel geht Lord Rayleigh aus (Phil. Mag. Vol. 10, 1880) "On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and arbitrary phase", um die Wahrscheinlichkeit abzuleiten mit welcher die Resultante einer grossen Anzahl zusammengesetzter, in einer Ebene liegender Vektoren durch einen willkürlich fixierten Punkt geht; dieses Resultat ist dann sofort auf unseren Fall übertragbar, wenn wir aus (2) den Ausdruck (5) bilden

$$(5) \quad \frac{Pr_1}{2} = (S_1 \cos \alpha + S_2 \cos 2\alpha + \dots + S_p \cos p\alpha)^{\frac{1}{2}} + (S_1 \sin \alpha + S_2 \sin 2\alpha + \dots + S_p \sin p\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

und die $S_i \cos i\alpha$ als x -Componenten, die $S_i \sin i\alpha$ als y -Componenten des Vektors $\frac{Pr_1}{2}$ betrachten. Da $a_0 p = S_1 + S_2 + \dots + S_p$ nichts anderes ist als die Summe sämtlicher Beobachtungswerte, so fassen wir die S zu einer Zahl N zusammen und setzen $p = \frac{N}{a_0}$ in (5) ein, so dass

$$(6) \quad R = \frac{Nr_1}{2a_0} = (S_1 \cos \alpha + S_2 \cos 2\alpha + \dots + S_p \cos p\alpha)^{\frac{1}{2}} + (S_1 \sin \alpha + S_2 \sin 2\alpha + \dots + S_p \sin p\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

Rayleighs Untersuchung verläuft nun so:

Von n Componenten, die willkürlich positiv und negativ sein können, liegt mit einer Wahrscheinlichkeit $P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$ die Anzahl positiver Componenten zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}n \pm \gamma \sqrt{\frac{n}{2}}$, da in Bernoullis Theorem $p = q = \frac{1}{2}$ zu setzen ist.

Im äussersten Falle ist also die Anzahl positiver Componenten $= \left| 2\gamma \sqrt{\frac{n}{2}} \right|$. Daraus folgt, dass die Anzahl positiver Componenten innerhalb der Grenzen $\frac{1}{2}n + \gamma \sqrt{\frac{n}{2}}$ und $\frac{1}{2}n + (\gamma + d\gamma) \sqrt{\frac{n}{2}}$ mit einer Wahrscheinlichkeit $P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^2} d\gamma$ liegt, was auch noch für die Anzahl $\left| 2\delta\gamma \sqrt{\frac{n}{2}} \right|$ positiver Componenten gilt. Setzen wir $2\gamma \sqrt{\frac{n}{2}} = x$, $2(\gamma + d\gamma) \sqrt{\frac{n}{2}} = x + dx$, dann ist $\gamma = \frac{x}{\sqrt{2n}}$, $d\gamma = \frac{dx}{\sqrt{2n}}$, $P = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}} dx$.

Die Componenten seien dargestellt durch gerade Linien, durch einen Anfangspunkt 0 und von der Länge 1. $\frac{1}{2}n$ von ihnen laufen willkürlich in Richtung $\pm x$, $\frac{1}{2}n$ von ihnen laufen willkürlich in Richtung $\pm y$. Man fragt nach der Wahrscheinlichkeit mit der die Resultante dieser Vektoren durch einen Punkt des Rechteckes $dx dy$ geht.

$W_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{n}} \delta x$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Resultierende der positiven x -Componenten innerhalb δx liege.

$W_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{n}{2}}} e^{-\frac{y^2}{n}} \delta y$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Resultierende der positiven y -Componenten im Intervalle δy liege.

$W_1 W_2 = \frac{1}{\pi n} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{n}\right)} \delta x \delta y$ ist dann die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse.

Transformieren wir dieses Resultat noch auf Polarcordinaten durch die Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ \delta x \delta y &= r dr d\theta \end{aligned} \right\} \text{ wobei die Bedeutung von } r, \theta \text{ ersichtlich, so wird } W_1 W_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi n} e^{-\frac{r^2}{n}} r dr d\theta \text{ und endlich folgt}$$

(7) $P = W_1 W_2 = \frac{2}{n} e^{-\frac{r^2}{n}} r dr$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Resultierende innerhalb der Kreise r und $r + dr$ liege.

Es ist leicht zu zeigen, dass dieses Resultat nicht geändert wird, wenn die Componenten verschiedene Längen haben und nicht alle gleich eins sind, wie hier der Kürze halber angenommen wurde, natürlich unter der dauernden Voraussetzung, dass n sehr gross ist (Phil. Mag. Vol. 10, 1880).

Nun gehen wir auf unseren Fall zurück und suchen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $R = \frac{n r_1}{2 a_0}$ zwischen zwei zu bestimmenden Grenzen liegt. Da wegen der Konvergenz der Fourierschen Reihe $a_0 > r_1 \cos(\alpha - \varphi)$ ist, der \cos aber höchstens = 1 wird, so führen wir als Maß für die Amplitude der Periode von p Intervallen die Grösse $\rho = \frac{r_1}{a_0}$ ein. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Vektor $R = \frac{n}{2} \cdot \frac{r_1}{a_0} = \frac{n}{2} \rho$ zwischen den Grenzen $\frac{n}{2} \rho$ und $\frac{n}{2}(\rho + d\rho)$ liegt, ist dann nach (7) durch die Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{n}{2} \rho \\ dr &= \frac{n}{2} d\rho \end{aligned} \right\} \text{ sofort gegeben als}$$

(8)
$$P = \frac{n}{2} \rho d\rho e^{-\frac{n\rho^2}{4}}$$

Schuster führt dann in offener Analogie zu der mathematischen Erwartung bei Glücksspielen auch hier einen ähnlichen Begriff der Erwartung ein ("expectancy") und setzt die Erwartung ε für ρ gleich der Wahrscheinlichkeit für ρ multipliziert mit ρ .

ε ist also stets kleiner als ρ , nur wenn die Wahrscheinlichkeit für $\rho = 1$ ist, ρ also das Maß einer tatsächlich vorhandenen Periode ist, wird ε gleich ρ selbst.

Nach (8) ist die Erwartung für irgend ein ρ überhaupt gegeben durch

(9)
$$\varepsilon = \frac{n}{2} \int_0^{\infty} \rho^2 e^{-\frac{n\rho^2}{4}} d\rho.$$

Das Integral (9) ist eine Umformung eines Eulerschen Integrales der ersten Klasse, also einer Gamma-Funktion. Zu seiner Auswertung benützen wir den Satz über Gamma-Funktionen:

(1)
$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx = \Gamma(a), \quad a \text{ stets } > 0, \text{ so gilt}$$

(2) $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$, und da $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \Gamma(1)$, so ist ferner $\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots 1$.

Setzt man in (1) $x = t^2$, so wird (1) zu

$$2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2(a-1)+1} dt = \Gamma(a), \text{ und für } a = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^0 dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit $\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$, so folgt

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t^2} e^{-y^2} dt dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(t^2+y^2)} dt dy, \text{ und setzt man ferner } \begin{aligned} y &= xt \\ dy &= t dx, \text{ so wird} \end{aligned}$$

$$\left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt\right)^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(1+x^2)t^2} t dt, \text{ oder da } \int_0^\infty e^{-(1+x^2)t^2} t dt = \frac{1}{2(1+x^2)}, \text{ weil}$$

$$2 \int_0^\infty e^{-m^2 t^2} dt = \frac{\Gamma(1)}{2m} = \frac{1}{2(1+x^2)}, \text{ so ist } \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} (\text{arctg } \infty - \text{arctg } 0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \dots\dots$$

Setzt man in (1) $x = ky; k > 0$, so wird (1) zu

$$\int_0^\infty e^{-ky} k^{a-1} y^{a-1} k dy = \Gamma(a); \quad \frac{\Gamma(a)}{k^a} = \int_0^\infty e^{-ky} y^{a-1} dy.$$

In unserem Fall ist $\frac{n}{2} \int_0^\infty \rho^2 e^{-\frac{n}{4}\rho^2} d\rho$ zu integrieren. Es ist

$$2 \int_0^\infty e^{-k t^2} t^2 dt = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{k\left(\frac{3}{2}\right)}, \quad a = \frac{3}{2}$$

$$(10) \quad \frac{n}{2} \int_0^\infty \rho^2 e^{-\frac{n}{4}\rho^2} d\rho = \frac{n}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{n}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} = \frac{1.77}{\sqrt{n}} = \varepsilon.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass $\frac{r_1}{a_0} < \rho$, ist $\int_0^\rho \frac{n}{2} \rho e^{-\frac{n}{4}\rho^2} d\rho = P_1$

Die Wahrscheinlichkeit, dass $\frac{r_1}{a_0} > \rho$, ist $\int_\rho^\infty \frac{n}{2} \rho e^{-\frac{n}{4}\rho^2} d\rho = P_2$

$$(11) \quad P_1 = 1 - e^{-\frac{n}{4}\rho^2}$$

$$P_2 = + e^{-\frac{n}{4}\rho^2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass $\rho > \varepsilon$, ist $\left| -e^{-\frac{n}{4}\rho^2} \right|_\varepsilon^\infty = + e^{-\frac{n}{4}\varepsilon^2} = e^{-\frac{\pi}{4}}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass $\rho > k\varepsilon$, ist: $W = e^{-\frac{k^2\pi}{4}}$,

so dass wir also die endgültigen Ausdrücke erhalten:

$$(12) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Die Wahrscheinlichkeit, dass } \rho > k\varepsilon = e^{-\frac{k^2\pi}{4}} \\ \text{Die Wahrscheinlichkeit, dass } \rho < k\varepsilon = 1 - e^{-\frac{k^2\pi}{4}} \end{array} \right\}$$

Die Funktion $e^{-\frac{k^2\pi}{4}}$, auf die es zur Berechnung der wahrscheinlichen Amplituden im wesentlichen ankommt, kann mit dem Argument k in eine Tafel gebracht werden, um ein experimentelles Gesetz für die Grösse der wahrscheinlichen Amplituden abzuleiten. Die hier angeführte Tafel ist der Schusterschen Abhandlung "On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena" (Terrest. Magnetism III. 13) entnommen.

k	$\frac{-\pi k^2}{e^4}$	k	$\frac{-\pi k^2}{e^4}$
0.1	0.9922	1.4	0.2145
0.2	0.9691	1.6	0.1339
0.3	0.9318	1.8	0.0785
0.4	0.8819	2.0	0.0432
0.5	0.8217	2.5	0.0074
0.6	0.7537	3.0	0.00085
0.7	0.6806	3.5	6.631×10^{-5}
0.8	0.6049	4.0	3.487×10^{-6}
0.9	0.5293	4.5	1.238×10^{-7}
1.0	0.4559	5.0	2.967×10^{-9}
1.2	0.3227		

Betrachten wir die ersten und letzten Werte der Funktion und nehmen wir z. B. das gefundene ρ zu 0.05 an, und n sei 2500, ein Fall, wie wir ihn später ungefähr treffen werden, dann wird:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1.77}{50} = 0.0354 \\ k &= \frac{0.05}{0.0354} = 1.413 \\ \frac{-\pi k^2}{e^4} & \text{ (aus der Tafel) } = 0.2145 \end{aligned} \right\} \text{ Und wir finden, dass von } \frac{1}{0.2145} = 5 \text{ F\u00e4llen je einer noch einen gr\u00f6sseren Wert verspricht, und von } \frac{1}{1 - 0.2145} = 1.3 \text{ F\u00e4llen je einer noch einen kleineren Wert. Solch ein } \rho \text{ w\u00fcrde uns also keineswegs berechtigen, die Existenz der angenommenen Periode zu behaupten.}$$

Ist aber $\rho = 4\varepsilon$, also $k = 4$, so finden wir aus der Tafel, dass von $\frac{1}{3.487 \times 10^{-6}} = 286500$ F\u00e4llen nur einer mit einem gr\u00f6sseren Wert zu erwarten ist, und von $\frac{1}{1 - 3.487 \times 10^{-6}} = 1$ Fall, noch ein kleinerer, d. h. jedes ρ ist kleiner zu erwarten, als es angenommen wurde. Zeigt sich nun ein ρ , das dennoch gr\u00f6sser ist als seine Nachbarwerte, unter wenigen betrachteten F\u00e4llen, so haben wir Grund genug, dieses Verhalten auf eine gesetzm\u00e4ssige, nicht eine willk\u00fcrliche, Anordnung der Zahlen zur\u00fcckzuf\u00fchren, d. h. auf das Vorhandensein einer wahren Periodizit\u00e4t zu schliessen.

(13) Wir nehmen also $k = 3\varepsilon$, oder $k = 4\varepsilon$, als kritischen Wert an und wollen nur auf die Existenz wahrer Perioden schliessen, wenn dieser Wert zum mindesten erreicht wird. Diese Festsetzung macht nat\u00fcrlich nur Anspruch darauf, in roher Weise die Existenz oder Nichtexistenz der Perioden zu entscheiden. Handelt es sich um die letzte strenge Beweisf\u00fchrung einer Periodizit\u00e4t, so ist namentlich auch auf das Verhalten der Phasen in benachbarten Intervallen R\u00fccksicht zu nehmen. Das Gesetz gibt jedoch eine n\u00fctzliche Rechnungsvorschrift f\u00fcr eine erste Durchsuchung des Materials, um die es sich hier handelt.

Es sei noch erw\u00e4hnt, dass Schuster in der vorhin erw\u00e4hnten Abhandlung "On hidden periodicities" die soeben abgeleiteten Formeln noch auf den Fall modifiziert, in welchem die Beobachtungsgr\u00f6ssen l nicht einzeln von einander unabh\u00e4ngig, sondern gruppenweise auftreten, und er erh\u00e4lt unter Ber\u00fccksichtigung der Gruppenbildung ein neues, dem ersten analoges Formelsystem zur Sch\u00e4tzung der wahrscheinlichen Amplitude und der Erwartung f\u00fcr diese Amplitude. Diese Formeln kommen f\u00fcr unseren Fall aber nicht in Betracht, denn wie sp\u00e4ter noch ausf\u00fchrlicher gezeigt wird, legen wir der Rechnung nicht die direkten Beobachtungen zugrunde, sondern die sogenannten Wolfschen Relativzahlen, in welchen die Gruppenbildungen der einzelnen Flecken f\u00fcr sich ber\u00fccksichtigt werden, so dass die Relativzahlen unter sich als gleichwertig gelten k\u00f6nnen.

Einen ganz anderen Weg, um die wahrscheinliche Amplitude einer untersuchten Periode zu finden, sch\u00e4gt O. Meissner ein (Astronom. Nachr., Bd. 186, 57, 1910): „\u00dcber die Wahrscheinlichkeit errechneter Periodizit\u00e4ten“. Sein Verfahren ist folgendes:

Man bilde aus dem Beobachtungsmaterial zwei möglichst gleich grosse Serien und berechne aus jeder einzelnen die Amplituden a_1, a_2 der Periode. Die Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins der Periode mit der Amplitude a unter Benutzung der ganzen Reihe ist um so grösser, je besser die Phasen und je besser die Amplituden der Teilreihen stimmen. Wir nehmen sie also als zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $w_\varphi w_a$ an. Bei der Phasendifferenz 0 ist $w_\varphi = 1$, zugleich $a = \frac{a_1 + a_2}{2} = m$.

Wir setzen also $w_\varphi = \frac{a}{m}$, denn für $a = m$ wird $w_\varphi = 1$ und der Bruch kann niemals > 1 werden.

Für $a_1 = a_2$ wird $w_a = 1$, je mehr $a_1 \neq a_2$, um so kleiner wird w_a . Also ist eine möglichst einfache Funktion zu bilden, welche diese Bedingung erfüllt. Meissner nimmt dafür zunächst $\left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$, das Quadrat, um stets positive Werte zu bekommen.

Für $a_1 = a_2$ wird die Funktion = 0, oder $1 - \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2 = 1$, und dieser Ausdruck wird immer kleiner, je verschiedener a_1 von a_2 ist. Es ist aber $\left[1 - \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2\right] = \frac{4 a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{m^{*2}}{m_2}$, wenn m das arithmetische, m^* das geometrische Mittel bedeuten. Zuletzt wird die Wurzel wieder gezogen, weil das vorherige Quadrieren ja nur Vorzeichenwechsel fortschaffen sollte, und als w_a wird angenommen $w_a = \frac{m^*}{m}$. Also $w = w_\varphi w_a = \frac{a m^*}{m_2}$.

Meissner behandelt dann noch den Fall, dass noch andere Perioden von grosser und bekannter Amplitude ausser der gerade betrachteten vorhanden sind. In diesem Falle wird dann das Beobachtungsmaterial nicht einfach geteilt, sondern es wird so angeordnet, dass die beiden Teilserien die dominierende Periode beide in gleicher Weise enthalten — die Formeln nehmen dann etwas andere Gestalt an. So willkommen es uns nun sein könnte, in dieser Weise eine Möglichkeit zu haben, die bekannten Perioden aus unsern Beobachtungsreihen zu eliminieren, so ist die Meissnersche Methode für unsern Fall trotzdem nicht anwendbar aus Gründen, die erst später hervortreten werden und die in dem Auftreten der „scheinbaren Perioden“ zu suchen sind, welche eine Teilung des verwandten Materials nicht immer zulassen. Ausserdem mag es dahingestellt bleiben, ob die „Bildung der einfachen Funktion“ nicht als eine gewisse Willkürlichkeit der Meissnerschen Methode empfunden werden kann.

Eine dritte Methode zur Ermittlung wahrer Periodizitäten, welche zwar ihrem Wesen nach nichts Neues enthält, da sie wiederum die Entwicklung nach Fourierschen Reihen voraussetzt, welche aber in äusserst einfacher Weise gestattet, die Ergebnisse der Rechnung zu interpretieren, stammt ebenfalls von A. Schuster und ist in ihrer letzten Fassung in Proceedings of the Royal Society, vol. LXXVII, pag. 136 ff., zu finden, nämlich die Herstellung des Periodogramms.

Das Periodogramm definiert Schuster folgendermassen:

$f(t)$ sei eine periodische Funktion und als Fouriersche Reihe dargestellt in der Form:

$$f(t) = \sum_a A_a \cos(a \cdot 2 \pi n t) + \sum_a B_a \sin(a \cdot 2 \pi n t)$$

und beschränken wir die Entwicklung auf das erste periodische Glied, so dass $f(t) = a_0 + a \cos(2 \pi n t) + b \sin(2 \pi n t)$, so sind

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(2 \pi n t) dt \\ b &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(2 \pi n t) dt \end{aligned} \right\} \text{ wo } 2 \pi n = \frac{2 \pi}{T}.$$

Bilden wir nun eine Kurve mit fortschreitenden Werten T als Abszissen und den zugehörigen Werten $(a^2 + b^2) = r^2$ als Ordinaten, so stellt der Raum zwischen der x -Achse der Kurve und den begrenzenden Ordinaten das Periodogramm der Funktion $f(t)$ dar. Bildet man nun die Ordinaten

$$r^2 = \left(\frac{2}{T_1}\right)^2 \left[\left(\int_{t_1}^{t_1+T_1} f(t) \cos(2 \pi n t) dt\right)^2 + \left(\int_{t_1}^{t_1+T_1} f(t) \sin(2 \pi n t) dt\right)^2 \right]$$

für verschiedene um kleine Bruchteile von T , fortschreitende Werte T , so wird in der Nähe einer wahren Periode die Kurve nahezu geradlinig horizontal verlaufen und das Periodogramm nahezu ein Rechteck ("band"). Ist also durch die graphische Darstellung ein "band" gefunden, so bleibt nur noch zu ermitteln übrig, ob die mittlere Höhe desselben die in (13) gestellte Forderung erreicht, um die Existenz einer wahren Periode zu behaupten, wobei es sofort klar ist, dass, wenn kein harmonischer Analysator verwandt, sondern das Periodogramm rechnerisch konstruiert wird, die Integrale in die früher verwendeten Summen übergehen.

Ein Umstand ist aber bei Anwendung aller Methoden, welchen eine Fouriersche Entwicklung zugrunde liegt, besonders zu beachten, auf den Schuster (Terrest. Magnetism, III. 1898) aufmerksam macht, nämlich auf das Auftreten von scheinbaren Perioden ("spurious periods"), die eine Folge der Entwicklung in bestimmten endlichen Grenzen, also in der Methode selbst begründet sind. Schuster gibt dafür folgendes Beispiel, das sich sofort verallgemeinern und auf unsern Fall speziell direkt übertragen lässt, da wir unserer Rechnung die cosinus-Entwicklung von Seite 7 zugrunde legen:

Gegeben sei eine reinperiodische Funktion: $\cos qt$. Wir zeigen, dass, wenn dieselbe der Fourierschen Entwicklung in bestimmten Grenzen unterzogen wird, ausser ihrer wahren Periode $\frac{2\pi}{q}$ noch andere, scheinbare Perioden auftreten. Um also die Amplitude einer möglichen Periode $\frac{2\pi}{k}$ in $\cos qt$ zu untersuchen, bilden wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} Ta &= \int_0^T \cos qt \cos ktdt \\ \frac{1}{2} Tb &= \int_0^T \cos qt \sin ktdt \end{aligned} \right\} T = \frac{2\pi}{k}$$

Die Auswertung der Integrale bietet unter Benützung der bekannten trigonometrischen Umformungen keine Schwierigkeit und liefert

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} Ta &= \frac{2q}{q^2 - k^2} \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{1}{2} Tb &= \frac{2k}{k^2 - q^2} \sin \alpha^2 \end{aligned} \right\} \alpha = \pi n \frac{q - k}{k}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2}{q + k} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} (q^2 \cos^2 \alpha + k^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

Wenn q und k nahezu gleich sind, dann wird $r = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ und $\frac{b}{a} = -\operatorname{tg} \alpha$. Das heisst aber, dass r ausser dem Maximum $\alpha = 0$ oder $k = q$ noch eine Reihe anderer Maxima besitzt, die wir erhalten, wenn wir $\frac{dr}{d\alpha} = 0$ setzen, also $\frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha^2} = 0$ oder $\alpha = \operatorname{tg} \alpha$. Die scheinbaren Perioden sind demnach die Lösungen der transzendenten Gleichung $\alpha = \operatorname{tg} \alpha$, deren Hauptlösung $\alpha = \pm 1.43\pi$ ist.

Bezeichne nun τ die wahre, τ' die scheinbare Periode, so ist $\pm 1.43\pi = \pi n \frac{q - k}{k}$; $1 \pm \frac{1.43}{n} = \frac{q}{k}$ und da $\left. \begin{aligned} q\tau &= 2\pi n \\ k\tau' &= 2\pi n \end{aligned} \right\} \frac{q\tau}{k\tau'} = 1, \frac{q}{k} = \frac{\tau'}{\tau}$, so folgt $\tau' = \tau \left(1 \pm \frac{1.43}{n}\right)$. Und τ' nähert sich dem Werte der wahren Periode τ , wenn n wächst. Es gilt also wiederum die von vorneherein einleuchtende Forderung, dass n , die Zahl der der Untersuchung zugrunde gelegten Perioden, hinreichend gross gewählt werden muss, um das Auftreten wesentlich von τ abweichender Perioden zu vermeiden.

Ist dies aber der Fall, also k und q nahe gleich, so gilt nach dem Früheren $r = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{b}{a}\right) = -\alpha$, also die Entwicklung $f(t) a_0 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos(kt + \alpha)$, wo $\alpha = \pi n \frac{q - k}{k}$ und α wird regelmässig mit n wachsen, so dass wir diesen Umstand, nämlich das regelmässige Fortschreiten der Phase in der Nähe einer wahren Periode, geradezu als neues Kriterium benützen können, um auf die Existenz derselben zu schliessen.

Die vorstehend besprochenen Methoden, und zwar speziell die von Schuster entwickelten, sind nun im folgenden auf den Gang des Sonnenfleckenphänomens angewandt.

II. Das Zahlenmaterial.

Die zur Rechnung verwandten Zahlen sind die „Wolfschen Relativzahlen“, welche jährlich in den „Astronomischen Mitteilungen“ der Zürcher Sternwarte als „tägliche Flecken-Relativzahlen im Jahre...“ publiziert werden. Diese Relativzahlen r werden aus den Beobachtungen der Sonnenflecken und Sonnenfleckengruppen bekanntlich nach der Formel gefunden:

$r = k(f + 10g)$, wo g die Anzahl der an jenem Tage sichtbaren Fleckengruppen, f die Gesamtzahl der in diesen Gruppen vorhandenen Einzelflecken bedeutet, und k eine vom Beobachter und Instrument abhängige Constante bezeichnet. Diese Constante ist gleich 1 angenommen für Wolf und das von ihm anfänglich benutzte Instrument, nämlich das 8 cm Fernrohr der Zürcher Sternwarte. Die f und g werden durch direkte Zählung erhalten. Die k werden rechnerisch für jeden einzelnen Beobachter ermittelt und zwar folgendermassen:

Die in Zürich von Professor Wolfer am oben erwähnten Normalinstrument (8 cm Fernrohr) erhaltenen Zahlen werden durch den Reduktionsfaktor 0.60 auf die Wolfsche Einheit der Relativzahlen reduziert. Dieser Faktor 0.60 ist als Mittelwert aus langjährigen Vergleichen der Wolfschen und Wolferschen Beobachtungen von 1876—1893 hervorgegangen und wird gegenwärtig unverändert beibehalten. Immerhin zeigen seine einzelnen Jahreswerte Schwankungen, die nicht zufälliger Natur sind, sondern mit einem Wechsel im Instrumente Wolfs und einer Abnahme seiner Sehkraft zusammenhängen, worauf nachher zurückzukommen ist. Sodann werden aus allen Beobachtungsreihen anderer Stationen, welche ebenfalls in den „Astronomischen Mitteilungen“ veröffentlicht sind, die mit den Wolferschen korrespondierenden ausgesucht und durch Vergleichung der betreffenden Relativzahlen mit den auf die Wolfsche Einheit reduzierten Wolferschen, die Reduktionsfaktoren aller Beobachtungsreihen ermittelt, welche dieselben nun ihrerseits auf die Wolfsche Einheit zurückführen. Und zwar werden diese Faktoren jeweilen getrennt, als Mittel aus je sechs Monatswerten berechnet, so dass jährlich für jede Beobachtungsstation zwei Werte k erhalten werden. Nach erfolgter Multiplikation mit den zugehörigen k gehen durch Mittelbildung alle die Werte r aus den fremden Reihen hervor, für welche sich in der Reihe Wolfer keine korrespondierenden befinden; so dass die ergänzte Wolfersche Beobachtungsreihe für jeden Tag des Jahres eine Relativzahl r gibt. Die seit dem Jahre 1893 (dem Todesjahre Wolfs) veröffentlichten Zahlen sind alle auf die soeben erläuterte Weise hergestellt und daher unter sich vollkommen homogen. Für den vor 1894 liegenden Zeitraum gilt dies nicht ganz im selben Masse, wegen der vorhin erwähnten etwelchen Veränderung des Reduktionsfaktors k . Es erschien somit angezeigt für den Zeitraum 1877—1893 die Relativzahlen neu zu berechnen auf genau derselben Grundlage wie jene von 1893—1911, indem die Wolferschen Beobachtungen zu Grunde gelegt, mit dem Faktor 0.60 auf Wolf reduziert und aus den so erhaltenen Relativzahlen die Reduktionsfaktoren für die verfügbaren auswärtigen Ergänzungsbeobachtungen neu abgeleitet wurden.

Es würde allerdings zu fragen sein, ob nicht der Maßstab der Wolferschen Zählungen im Laufe der Jahre ebenfalls Veränderungen unterlegen habe und also die Beibehaltung des constanten Faktors 0.60 sich nicht rechtfertigt. Dass dies aber nicht der Fall ist wird indirekt dadurch bewiesen, dass die seit 1896 bis heute von Herr Broger am gleichen Instrumente parallel mit den Wolferschen gemachten Zählungen für den Reduktionsfaktor auf Wolf im Mittel genau denselben Wert 0.60 liefern, der für die Wolferschen gefunden wurde. Da dieser Wert aus der Vergleichung der Brogerschen Beobachtungen mit den auf Wolf mit 0.60 reduzierten Wolferschen hervorging, so hätte eine Veränderung des Maßstabes des letzteren auch auf eine andere Zahl für Broger führen müssen, was nicht der Fall ist. Es kann also gesagt werden, dass die so erhaltenen Reihen von Relativzahlen von 1877—1911 einen in sich so gleichartigen Charakter besitzen, als man den Umständen nach nur irgend verlangen kann.

Tabelle III. Zusammenstellung der Pentaden-Mittel a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1876	0	0	1	22	51	25	15	8	23	30	14	11	3	7	26	70	67	31	0	1	17	11	0	0	0	13	21	4	0	7	0	0	0	0	7	11
77	3	20	30	25	12	5	4	6	10	5	0	10	24	13	0	12	2	0	0	3	3	19	21	18	13	16	18	14	18	7	6	16	14	9	6	13
78	0	0	0	1	8	6	10	20	0	0	0	0	10	5	16	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	24	32	3	0	0	1	10
79	2	0	1	0	0	5	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	17	6	0	0	6	6	0	0	0	0	6	5	0	0	10
80	16	14	40	22	1	9	30	43	30	0	8	13	12	17	25	15	3	13	20	17	19	7	11	21	33	20	16	4	9	30	31	10	20	20	36	46
81	25	14	13	41	36	47	49	40	26	45	50	35	14	45	110	73	32	21	35	38	46	65	72	33	17	42	26	45	42	62	76	39	56	55	36	75
82	39	41	59	42	56	59	55	74	99	86	57	26	42	88	84	79	69	59	83	81	119	141	80	36	45	84	104	97	29	14	25	23	36	57	49	71
83	84	47	37	48	53	35	41	56	68	49	18	22	6	27	48	46	63	54	71	73	94	107	72	48	25	40	50	37	20	7	51	96	43	56	87	103
84	103	159	99	79	68	85	86	92	91	106	76	105	104	113	131	108	83	44	89	80	67	80	103	93	64	64	92	64	72	99	80	69	60	52	61	52
85	46	27	23	44	82	71	66	69	80	97	86	54	113	70	58	35	18	57	51	81	75	24	49	67	77	103	47	47	78	97	84	91	56	120	98	85
86	27	47	68	52	4	2	22	27	35	27	17	32	88	61	29	32	44	62	91	39	7	24	46	45	71	68	19	60	21	20	34	43	7	11	37	37
87	18	5	0	5	16	26	23	4	0	12	27	18	4	3	1	16	11	6	6	0	3	12	8	15	22	41	23	38	9	15	19	19	26	15	20	11
88	11	13	22	23	14	0	5	1	3	5	27	13	1	4	23	15	12	2	8	2	4	7	7	22	0	0	12	25	11	0	3	1	16	16	4	12
89	0	1	0	5	0	0	10	6	0	0	7	16	7	9	19	1	0	0	7	7	4	1	0	0	1	9	0	0	0	2	0	0	0	12	16	5
90	7	7	0	11	3	1	4	0	1	0	0	3	8	12	6	0	2	0	0	0	11	2	1	6	1	5	10	16	9	2	0	11	3	0	1	0
91	1	2	1	16	24	35	12	5	32	42	43	27	11	11	12	13	7	5	19	13	20	28	42	40	24	33	56	44	72	59	39	12	41	83	69	80
92	82	51	32	85	81	46	63	71	113	108	53	18	23	39	44	46	72	64	40	34	46	52	114	97	71	63	59	60	82	104	98	53	68	75	120	83
93	95	57	22	61	83	116	76	55	83	85	77	86	64	65	48	54	82	114	75	62	100	76	108	143	131	71	78	76	87	130	118	145	92	112	84	116
94	76	56	83	111	99	84	50	87	83	84	88	84	42	60	62	29	32	85	99	104	67	35	88	96	97	91	90	149	103	77	89	106	121	138	87	59
95	55	60	40	38	71	110	107	52	42	56	73	99	62	69	66	58	54	48	72	68	71	57	91	103	57	33	50	46	111	108	64	80	68	88	66	62
96	42	30	14	16	20	48	55	47	40	25	86	90	85	47	31	29	63	48	101	70	26	5	36	39	28	27	22	12	21	45	57	28	69	56	33	61
97	47	55	42	43	38	18	64	39	15	11	42	49	38	21	18	16	27	41	72	44	14	6	13	44	27	5	4	20	20	16	6	10	6	15	14	
98	29	22	18	51	49	17	4	34	53	71	25	21	40	81	80	17	8	8	13	31	12	0	3	28	24	33	30	20	23	22	36	17	9	28	14	33
99	25	41	19	9	8	15	23	17	3	1	5	6	11	6	13	38	29	16	13	8	23	14	13	13	7	0	4	14	11	10	6	18	29	28	7	32
1900	3	0	17	12	6	18	16	44	17	1	0	0	9	23	1	0	3	16	12	9	8	3	16	48	43	7	4	0	16	20	14	0	0	18	27	12
1	0	0	1	0	0	0	3	9	1	0	0	0	15	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	33	22	6	0	1	10	12	30
2	3	17	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	32	35	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	6	8	9	0	0	0	2	0
3	6	8	3	6	15	11	10	10	26	17	16	22	11	1	8	1	17	39	32	26	16	9	18	58	42	1	6	10	16	16	2	5	12	18	48	13
4	43	25	15	36	58	18	10	30	30	14	32	27	19	30	20	38	60	55	35	28	39	40	61	57	53	50	52	38	21	30	23	38	44	61	53	31
5	19	43	79	89	53	45	84	123	114	63	59	71	105	77	17	38	59	50	42	25	53	37	32	46	39	59	58	71	18	26	39	58	44	46	20	64
6	32	32	34	18	70	83	40	21	17	24	47	36	25	41	44	83	114	90	83	72	48	41	26	62	40	45	69	49	56	85	72	76	40	19	43	104
7	85	60	94	90	60	65	96	122	142	90	100	95	81	93	72	43	29	19	80	77	48	31	46	33	29	78	64	34	38	19	20	24	42	81	56	19
8	49	56	49	32	35	16	31	35	53	28	27	29	15	29	41	47	31	12	41	106	49	19	52	64	71	61	50	23	18	25	64	82	31	27	34	36
9	46	46	27	36	69	107	68	12	42	47	41	89	98	23	23	39	107	103	47	21	8	32	57	28	32	37	59	37	36	20	7	30	15	38	22	21
10	43	18	8	14	39	34	18	0	19	45	65	38	30	26	24	20	17	13	4	3	15	17	6	5	13	19	21	43	26	11	23	10	9	5	3	24
11	6	8	7	0	0	0	0	19	20	4	10	21	13	1	0	1	9	38	18	7	0	15	21	20	16	0	1	6	11	9	1	0	0	2	2	

den täglichen Fleckenrelativzahlen von 1876 bis 1911.

	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	
25	12	1	12	10	1	0	0	5	7	17	12	11	0	12	8	3	25	19	0	24	17	15	5	10	2	13	18	4	0	0	0	0	9	20	9	1876	
8	3	5	0	0	8	0	1	0	3	13	7	12	20	17	9	6	7	0	0	0	1	5	32	20	1	7	2	13	12	5	0	0	0	1	2	77	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	10	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	7	5	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	78	
7	11	6	0	2	1	0	13	10	2	18	21	11	3	2	1	8	10	6	16	22	23	2	0	5	30	15	4	3	16	9	3	0	15	7	2	79	
29	9	3	29	26	16	27	45	60	53	18	29	35	80	58	46	45	78	49	36	28	40	52	24	32	6	11	29	32	36	17	25	8	18	30	27	80	
52	56	54	60	96	103	62	34	13	25	69	91	46	42	52	36	27	52	60	56	40	63	63	24	16	44	66	54	50	25	50	46	66	35	24	32	81	
22	37	63	72	37	46	19	31	27	65	47	56	74	42	34	38	58	75	69	20	42	79	47	56	89	51	58	73	91	118	23	47	43	40	28	44	82	
36	64	106	146	86	39	26	41	58	61	62	87	78	70	77	45	22	23	44	146	101	83	72	104	116	90	106	122	81	57	31	57	67	108	116	92	83	
88	55	40	41	64	93	63	53	45	65	80	62	34	48	73	100	85	77	76	50	36	53	72	76	37	17	60	43	45	47	46	47	47	59	76	47	84	
70	72	90	69	76	54	52	84	61	39	51	64	47	28	29	27	47	42	35	39	5	38	55	58	25	42	50	54	17	5	6	13	18	34	46	40	85	
33	3	24	32	49	43	35	15	9	7	7	17	32	36	48	29	6	6	17	9	10	9	8	5	0	0	4	0	0	0	2	8	13	10	35	33	86	
45	25	8	8	32	49	52	13	27	23	5	1	10	4	23	23	9	6	10	0	4	22	21	6	4	12	21	8	0	0	17	38	23	39	27	4	87	
8	9	16	0	3	5	1	6	12	6	6	20	25	23	13	3	10	5	2	0	2	1	9	6	2	16	23	13	5	10	17	7	2	16	5	0	88	
0	9	20	12	16	26	28	33	21	4	5	11	10	2	0	1	12	11	3	3	3	1	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	1	13	12	19	89	
23	19	0	10	18	26	14	3	1	0	20	36	12	24	12	17	19	21	7	6	3	19	37	16	0	9	12	0	17	21	4	3	21	22	7	8	90	
40	97	79	77	36	32	60	59	46	16	27	38	89	57	48	57	30	72	87	80	42	29	30	38	53	40	19	55	53	26	20	22	22	26	45	56	91	
38	81	61	50	76	120	102	69	54	44	46	48	45	59	68	58	62	88	108	73	45	55	45	52	73	42	42	40	53	76	101	100	45	22	50	74	92	
141	178	101	79	58	79	211	97	45	76	66	80	106	99	67	78	102	76	78	64	87	99	108	67	34	70	103	116	74	50	62	29	45	83	155	166	93	
126	133	137	110	84	70	96	73	89	71	27	49	60	107	97	44	40	53	109	125	69	42	50	55	68	70	48	45	56	61	89	68	35	48	59	56	94	
66	81	41	27	24	64	122	86	56	46	45	39	48	40	62	46	70	115	97	36	30	36	88	104	80	20	35	49	49	31	47	82	91	74	85	55	95	
43	44	65	69	29	14	12	14	33	40	31	43	23	68	106	99	43	21	11	15	24	54	45	25	27	46	73	29	26	25	44	53	32	37	45	44	96	
27	27	26	29	32	25	26	37	19	12	17	27	70	66	18	45	58	39	30	15	14	11	3	4	8	5	5	11	5	18	41	58	52	24	6	20	97	
0	5	9	15	12	49	51	45	32	10	15	13	34	59	50	22	15	39	56	32	21	14	33	54	65	51	19	12	11	17	23	21	7	13	1	12	98	
22	23	6	0	11	6	0	0	0	0	12	4	4	0	5	7	16	22	0	7	0	0	37	33	1	3	14	15	7	7	11	9	22	13	0	6	99	
0	1	22	18	3	0	5	19	0	0	0	9	21	15	3	0	3	1	2	15	6	31	16	0	3	0	6	13	8	8	0	0	0	0	1	0	1900	
0	0	0	4	0	3	0	0	0	1	1	0	0	3	0	0	0	0	1	12	0	0	0	11	0	0	7	8	7	0	0	0	0	0	0	0	1	
3	0	0	0	0	0	3	0	8	0	1	1	0	0	0	15	23	10	18	22	7	6	30	15	0	0	11	26	25	0	0	0	3	4	0	0	2	
28	47	30	18	31	16	21	67	50	14	12	5	2	12	24	3	18	12	36	86	56	15	14	42	83	85	42	12	16	24	62	82	45	43	20	24	3	
36	28	73	58	52	50	44	62	42	29	84	96	23	20	18	30	52	28	31	64	57	47	56	76	29	24	25	40	53	57	27	77	111	59	31	28	4	
52	120	121	101	13	23	79	77	46	70	42	57	66	63	74	36	24	76	106	72	61	110	57	63	83	119	130	84	112	114	71	50	44	55	64	46	5	
119	82	110	113	77	67	18	36	35	45	74	89	53	62	67	61	43	33	54	23	9	8	13	17	19	31	69	18	42	69	48	38	66	98	64	69	6	
28	50	75	60	52	46	55	48	67	65	40	61	78	107	80	74	88	83	44	70	89	98	52	31	46	90	90	70	49	19	20	62	75	62	42	30	7	
43	15	49	74	26	43	119	92	80	78	67	120	120	86	63	80	86	79	62	51	15	5	24	25	19	66	78	51	35	24	30	32	25	34	62	52	8	
16	11	40	84	55	26	23	26	33	17	14	21	26	65	27	37	42	39	66	94	89	34	35	42	76	45	29	43	56	98	75	16	13	64	65	78	9	
25	14	9	2	14	15	23	25	9	4	0	11	25	17	1	25	39	77	34	21	13	49	69	22	4	0	3	17	3	0	0	8	15	7	4	2	10	
0	7	4	0	3	0	6	8	9	1	0	4	15	5	0	0	0	1	11	4	0	0	0	3	4	1	1	0	9	9	1	0	0	4	5	1	11	

Es ist hier darauf verzichtet für den ganzen Zeitraum die täglichen Relativzahlen zusammenzustellen, es möge genügen die Monatsmittel anzuführen wie Tabelle II sie enthält. In Tabelle I wurden für die betreffenden 18 Jahre die berechneten Koeffizienten k , nach Beobachtungsstationen geordnet, zusammengestellt. Da es ferner für die Behandlung kleinerer Perioden wünschbar war, in kürzeren als monatlichen Intervallen fortschreiten zu können, wurden ausserdem aus je 5 Tagen die Pentaden-Mittel der Flecken gebildet, wobei also ein Jahr in 73 Pentaden zerfällt; bei Schaltjahren ist die 73. Pentade das Mittel aus 6 Zahlen; diese Werte enthält Tabelle III.

Tabelle I

Station	Jahr	k_1	k_2	Station	Jahr	k_1	k_2	Station	Jahr	k_1	k_2
Jena	1887	1.28	0.94	Madrid	1888	0.51	0.49	Palermo	1890	0.58	0.55
	88	1.45	1.09		89	0.54	0.62		91	0.60	0.62
	89	0.87	1.11		90	0.52	0.56	Bryn-Mawr	1890	0.93	0.68
	90	1.22	1.07		91	0.59	0.61	Dartmouth	1890	0.67	—
	91	1.08	1.08		92	0.60	0.52	Dorchester	1888	1.64	1.37
Kremsmünster	92	0.81	0.62	Haverford	93	0.63	0.60	89	1.64	0.91	
	93	0.80	0.77		1887	0.49	0.46	Potsdam	1886	1.36	1.36
	1892	0.93	0.73		88	—	0.50	87	—	—	
	93	0.67	0.48		89	0.59	0.66	88	1.34	1.28	
Philadelphia	1891	0.69	0.71	90	0.55	0.51	Laibach	1882	1.25	1.09	
	92	0.61	0.53	91	0.51	0.69		83	1.24	1.02	
	93	0.82	0.73	92	0.68	0.57		84	0.92	0.98	
Moncalieri	1876	0.97	1.00	Rom	93	0.66	0.86	85	0.98	0.96	
	77	0.93	1.03		1878	0.75	0.37	86	1.03	1.03	
	78	0.85	0.71		79	0.94	0.83	87	1.21	—	
	79	2.19	1.45		80	0.74	0.64	Gohlis	1882	1.13	0.85
	80	1.40	0.96		81	0.75	0.79		83	1.01	0.94
	81	1.05	1.07		82	0.93	0.84		84	0.92	0.89
	82	1.14	1.14		83	—	—	85	0.86	0.96	
	83	1.21	0.95		84	0.89	0.92	86	0.89	0.89	
	84	1.14	1.24		85	1.02	1.07	Athen	1876	1.31	1.04
	85	1.05	1.20		86	1.07	1.04		77	1.01	0.99
	86	1.01	0.88		87	1.04	1.33		78	1.42	0.70
	87	1.22	1.09		88	0.88	0.93	79	1.17	1.79	
	88	1.30	0.94		89	0.89	0.91	80	0.95	0.94	
	89	1.24	1.17		90	0.76	1.10	81	1.03	0.93	
	90	2.53	1.35		91	0.87	0.94	82	1.38	1.03	
91	1.14	1.09	92	0.89	0.83	83	1.11	1.07			
92	1.10	0.90	93	1.01	0.80	84	1.28	1.29			
93	1.17	1.13	Charkow	1893	0.62	0.40	85	1.97	1.10		
Catania	1892	0.65		0.52	Kalocsa	1891	0.59	0.78	86	1.84	2.12
	93	0.66	0.59	92		0.85	0.77	Lawrence Observ.	1877	1.11	0.72
Ogyalla	1885	1.36	1.53	Paris	93	1.24	1.05		78	0.57	0.30
	86	1.23	1.22		1888	0.79	0.79		79	0.77	0.90
	87	1.64	1.55		89	0.59	0.66	80	0.87	0.79	
	88	0.94	1.02		90	0.74	0.63	81	—	—	
	89	1.27	1.24		91	0.60	0.58	82	1.02	0.95	
	90	1.40	1.49		92	0.49	0.43	83	—	—	
	91	1.42	1.31		Palermo	1876	0.34	0.62	84	0.75	0.84
	92	1.44	1.21			77	0.56	0.69	85	0.67	0.63
93	1.17	1.30	78	0.51		—	Peckeloh	1876	0.99	0.56	
Madrid	1877	0.66	0.66	79	0.93	0.76		77	0.66	0.62	
	78	0.48	0.41	80	0.66	0.71		78	0.78	0.53	
	79	0.59	0.58	81	0.57	0.58	79	0.77	1.14		
	80	0.58	0.61	82	0.65	0.60	80	0.78	0.77		
	81	0.61	0.67	83	0.62	0.58	81	0.60	0.70		
	82	0.62	0.57	84	0.65	0.62	82	1.04	0.90		
	83	0.54	0.63	85	0.60	0.51	83	0.84	1.11		
	84	0.69	0.59	86	0.61	0.80	Leipzig	1879	0.94	1.01	
	85	0.66	0.60	87	0.60	0.72		80	0.78	0.88	
	86	0.66	0.65	88	0.54	0.55		81	0.89	0.91	
87	0.59	0.70	89	0.51	0.56						

Tabelle II.

Zusammenstellung der

Monats-Mittel

aus den täglichen Fleckenrelativzahlen von 1876 bis 1911.

Jahr	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1876	17.0	16.7	32.8	4.7	7.3	3.1	11.8	6.0	9.6	13.7	7.9	6.0
77	17.0	5.6	8.6	10.5	14.0	10.9	5.3	4.7	11.7	5.5	9.8	1.7
78	2.4	5.4	6.1	0.2	5.8	6.4	0.1	0.0	3.2	0.8	1.7	0.1
79	1.6	0.6	0.0	5.5	2.0	4.1	6.7	10.0	5.9	11.3	11.8	6.0
80	20.2	21.7	14.3	16.7	19.6	25.8	19.0	37.3	53.6	36.2	23.7	21.1
81	30.0	41.8	48.0	47.9	41.0	55.8	68.0	52.8	47.3	52.3	41.0	41.7
82	44.1	69.3	65.4	90.0	60.7	46.4	47.9	40.5	51.0	53.6	72.8	39.0
83	50.5	43.1	38.7	77.6	29.2	75.5	83.0	50.8	57.8	89.0	90.2	78.0
84	99.1	91.8	95.7	84.4	75.6	69.0	63.1	64.3	69.2	60.7	41.5	53.5
85	49.0	73.2	57.3	57.9	74.6	93.0	79.0	56.4	38.6	36.5	33.6	25.3
86	32.5	26.3	52.5	42.2	34.2	28.9	30.9	16.5	27.3	9.7	0.8	16.2
87	12.4	13.2	7.7	7.6	25.0	18.3	24.0	25.2	12.0	10.3	7.7	24.0
88	13.4	9.2	9.2	8.3	7.7	9.2	6.0	8.2	13.3	3.1	12.2	7.5
89	0.9	6.6	6.0	3.2	2.0	5.0	11.2	18.1	5.9	2.5	0.7	7.1
90	5.4	0.8	4.9	3.3	7.1	2.6	13.3	11.7	23.3	14.8	9.9	10.6
91	13.7	27.3	13.2	27.1	47.3	54.8	62.2	40.6	56.9	52.6	42.2	31.6
92	61.7	74.0	48.4	64.0	75.2	79.0	65.7	63.9	62.0	63.8	54.4	63.1
93	74.9	76.1	71.6	94.3	95.5	111.9	103.2	96.9	88.0	84.7	77.0	89.4
94	83.2	84.6	52.3	81.6	101.2	98.9	106.0	70.3	65.9	75.5	56.0	60.0
95	63.3	67.2	61.0	76.9	67.5	71.5	47.8	68.9	57.7	67.9	47.2	70.7
96	29.0	57.4	52.0	43.8	27.7	49.0	45.0	27.2	61.3	28.4	38.0	42.6
97	40.6	29.4	29.1	31.0	20.0	11.3	27.6	21.8	48.1	14.3	8.4	33.3
98	30.2	36.4	38.3	14.5	25.8	22.3	9.0	31.4	34.8	34.4	30.9	12.6
99	19.5	9.2	18.1	14.2	7.7	20.5	13.5	2.9	8.4	13.0	7.8	10.5
1900	9.4	13.6	8.6	16.0	15.2	12.1	8.3	4.3	8.3	12.9	4.5	0.3
1	0.2	2.4	4.5	0.0	10.2	5.8	0.7	1.0	0.6	3.7	3.8	0.0
2	5.2	0.0	12.4	0.0	2.8	1.4	0.9	2.3	7.8	16.3	10.3	1.1
3	8.3	17.0	13.5	26.1	14.6	16.3	27.9	28.8	11.1	38.9	44.5	45.6
4	31.6	24.5	37.2	43.0	39.5	41.9	50.6	58.2	30.1	54.2	38.0	54.6
5	54.8	85.8	56.5	39.3	48.0	49.0	73.0	58.8	35.0	78.7	107.2	55.5
6	45.5	31.3	64.5	55.3	57.7	63.2	103.3	47.7	56.1	17.8	38.9	64.7
7	76.4	108.2	60.7	52.6	43.0	40.4	49.7	54.3	85.0	65.4	61.5	47.3
8	39.2	33.9	28.7	57.6	40.8	48.1	39.5	90.5	86.9	32.3	45.5	39.5
9	56.7	46.6	66.3	32.3	36.0	22.6	35.8	23.1	38.8	58.4	55.8	54.2
10	26.4	31.5	21.4	8.4	22.2	12.3	14.1	11.5	26.2	38.3	4.9	5.8
11	3.4	9.0	7.8	16.5	9.0	2.2	3.5	4.0	4.0	2.6	4.2	2.2

III. Die Ergebnisse der numerischen Rechnung.

Aus den Werten der Tabelle II wurden zuerst Perioden in monatlichen Intervallen wachsend, von 8, 9, 10...24 Monaten in der früher beschriebenen Weise geprüft. Die Zahlen wurden angeordnet zu je 8, 9, 10...24 Vertikalkolonnen und jede Vertikalkolonne für sich summiert. Die so erhaltenen Werte S wurden sodann durch die Anzahl der Horizontalreihen dividiert, und diese Mittelwerte M , multipliziert mit den zugehörigen sinus und cosinus, liefern im wesentlichen die Grössen $a_1 b_1$, d. h. die Koeffizienten des ersten cosinus- und sinus-Gliedes der Fourierschen Reihe, das konstante Glied a_0 geht aus der Summation der M in einfacher Weise hervor. In den Fällen, wo die Winkelgrössen keine Teiler von 360° waren, wurden sie bis auf die Minute genau in Rechnung gebracht. Die Rechnung selbst wurde mit 4stelligen Logarithmen durchgeführt.

Als Beispiel sei hier das Rechnungsschema für eine 10monatliche Periode angeführt. Die Werte der Tabelle II denke man sich fortlaufend in Horizontalreihen von je 10 Gliedern in das Schema eingetragen bis zur Erschöpfung aller Zahlen in der n ten Reihe, was durch die Grössen r_1, r_2, \dots (r = Relativzahl) schematisch angedeutet wird. Im übrigen sind alle Bezeichnungen gewahrt, die bei der Besprechung des Verfahrens eingeführt wurden, und der Rechnungsgang ist aus dem Schema klar ersichtlich.

Die Resultate der numerischen Rechnung gibt die erste Hälfte der Tabelle IV.

Rechnungsschema für eine 10 monatliche Versuchsperiode.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1876 bis 1911	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}

	$r_{n \cdot 10}$
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
$10 a_0 =$	$\frac{S_1}{n} =$	$\frac{S_2}{n} =$	$\frac{S_3}{n} =$	$\frac{S_4}{n} =$	$\frac{S_5}{n} =$	$\frac{S_6}{n} =$	$\frac{S_7}{n} =$	$\frac{S_8}{n} =$	$\frac{S_9}{n} =$	$\frac{S_{10}}{n} =$
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
	0°	36°	72°	108°	144°	180°	216°	252°	288°	324°
	$\lg \cos 0^\circ$	$\lg \cos 36^\circ$	$\lg \cos 72^\circ$	$\lg \cos 108^\circ$	$\lg \cos 144^\circ$	$\lg \cos 180^\circ$	$\lg \cos 216^\circ$	$\lg \cos 252^\circ$	$\lg \cos 288^\circ$	$\lg \cos 324^\circ$
	$\lg M_1$	$\lg M_2$	$\lg M_3$	$\lg M_4$	$\lg M_5$	$\lg M_6$	$\lg M_7$	$\lg M_8$	$\lg M_9$	$\lg M_{10}$
	$\lg \sin 0^\circ$	$\lg \sin 36^\circ$	$\lg \sin 72^\circ$	$\lg \sin 108^\circ$	$\lg \sin 144^\circ$	$\lg \sin 180^\circ$	$\lg \sin 216^\circ$	$\lg \sin 252^\circ$	$\lg \sin 288^\circ$	$\lg \sin 324^\circ$
$\frac{10}{2} a_1 =$	$M_1 \cos 0^\circ$	$+ M_2 \cos 36^\circ$	$+ M_3 \cos 72^\circ$	$+ M_4 \cos 108^\circ$	$+ M_5 \cos 144^\circ$	$+ M_6 \cos 180^\circ$	$+ M_7 \cos 216^\circ$	$+ M_8 \cos 252^\circ$	$+ M_9 \cos 288^\circ$	$+ M_{10} \cos 324^\circ$
$\frac{10}{2} b_1 =$	$M_1 \sin 0^\circ$	$+ M_2 \sin 36^\circ$	$+ M_3 \sin 72^\circ$	$+ M_4 \sin 108^\circ$	$+ M_5 \sin 144^\circ$	$+ M_6 \sin 180^\circ$	$+ M_7 \sin 216^\circ$	$+ M_8 \sin 252^\circ$	$+ M_9 \sin 288^\circ$	$+ M_{10} \sin 324^\circ$

$$a_0 = \frac{1}{10} \sum_1^{10} M$$

$$a_i = \frac{2}{10} \sum M_i \cos \alpha_{(i-1)} \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$\alpha = 0.36^\circ, 1.36^\circ, 2.36^\circ, \dots, 9.36^\circ$$

$$b_i = \frac{2}{10} \sum M_i \sin \alpha_{(i-1)}$$

$$A = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \text{Amplitude}$$

$$\varphi = \text{arctg} \left(\frac{b}{a} \right) = \text{Phase}$$

$$\frac{1}{a_0} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \rho = \text{Ma\ss der Amplitude}$$

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = A^2 = \text{Ordinate des Periodogramms.}$$

Tabelle IV.

Periode	Periodenzahl	A^2	φ	a_0	A	ρ	
8 Mon.	54	0.502	343° 37'	34.5	0.715	0.0207	
9 "	48	3.49	135° 26	34.0	1.871	0.0550	
10 "	43	2.33	176° 28	34.6	1.529	0.0442	
11 "	39	7.08	338° 20	34.6	2.660	0.0769	
12 "	36	3.62	175° 20	34.0	1.900	0.0558	
13 "	33	0.80	145° 27	35.0	0.895	0.0255	
14 "	30	6.69	330° 20	35.0	2.580	0.0737	
15 "	28	1.72	94° 5	36.0	1.310	0.0364	
16 "	27	1.78	302° 15	34.4	1.330	0.0387	
17 "	26	4.95	351° 30	36.7	2.221	0.0605	
18 "	24	0.22	318° 52	35.5	0.469	0.0132 ...	Min.
19 "	22	1.38	184° 38	34.5	1.176	0.0344	
20 "	21	3.98	233° 22	35.1	1.990	0.0567	
21 "	20	3.99	322° 44	35.1	2.000	0.0570	
22 "	19	2.09	114° 9	35.1	1.447	0.0412	
23 "	18	2.57	109° 41	34.7	1.602	0.0463	
24 "	18	8.00	351° 52	34.5	2.830	0.0822 ...	Max.
						$M_\rho = 0.0481$	
42 Pentd.	62	0.072	347° 40'	34.5	0.268	0.0078 ...	Min.
41 "	64	1.96	87° 12	34.3	1.400	0.0408	
40 "	65	3.15	217° 25	34.6	1.775	0.0513 ...	Max.
39 "	67	1.08	160° 24	34.5	1.040	0.0302	
38 "	69	1.14	239° 0	34.4	1.064	0.0310	
37 "	71	0.25	199° 25	34.2	0.505	0.0148	
36 "	75	2.35	154° 10	33.8	1.532	0.0454	
35 "	75	1.64	133° 20	34.1	1.282	0.0376	
34 "	77	0.91	32° 25	35.3	0.955	0.0271	
33 "	79	1.45	312° 50	34.4	1.203	0.0350	
32 "	84	0.65	169° 59	34.1	0.809	0.0237	
31 "	84	1.37	58° 15	34.6	1.170	0.0338	
30 "	87	0.21	269° 53	34.5	0.454	0.0133	
						$M_\rho = 0.0301$	

Zur Diskussion der erhaltenen Werte bilden wir noch M_ρ , das heisst das Maß für den Mittelwert der Amplituden. Setzen wir den Mittelwert der Amplituden gleich der Erwartung ϵ für diesen Mittelwert, mit anderen Worten die Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens gleich 1, so muss nun entschieden werden, ob die Maximal- und Minimalwerte der ρ grösser resp. kleiner als $k\epsilon$ zu erwarten sind.

Für den Maximalwert ergibt sich $k = \frac{0.0822}{0.0481} = 1.71$

Für den Minimalwert ergibt sich $k = \frac{0.0132}{0.0481} = 0.275$

Mit diesen Werten gehen wir in die Tabelle Seite 11 ein und finden die zugehörigen $e^{-\frac{k^2 \pi}{4}}$.

Für $k = 1.7$ finden wir $e^{-\frac{\pi k^2}{4}} = 0.1062$

Für $k = 0.3$ finden wir $e^{-\frac{\pi k^2}{4}} = 0.9318$

Unter $\frac{1}{0.1062} = 9.44$ Fällen ist also je noch ein grösserer Wert als 0.0822 für ρ zu erwarten, und unter

$\frac{1}{1 - 0.9318} = 14.6$ Fällen noch je ein kleinerer als 0.0132, falls die Zahlen in willkürlicher Weise angeordnet sind.

Es zeigt sich daher, dass sich unsere errechneten ρ genau so verhalten, wie es auch bei gesetzloser Gruppierung der Zahlen wahrscheinlich wäre, und wir müssen auf die Behauptung reeller Periodizitäten im betrachteten Intervall verzichten. Immerhin kann es von Nutzen sein, den Verlauf des Periodogramms ebenfalls noch zu Rate zu ziehen, welcher in Fig. 1 angedeutet ist. Die erste Hälfte der Tabelle V, Seite 20, gibt die zu den Versuchsperioden gehörigen scheinbaren Perioden.

Fig. 1

Periodogramm für Versuchsperioden von 8 bis 24 Monaten

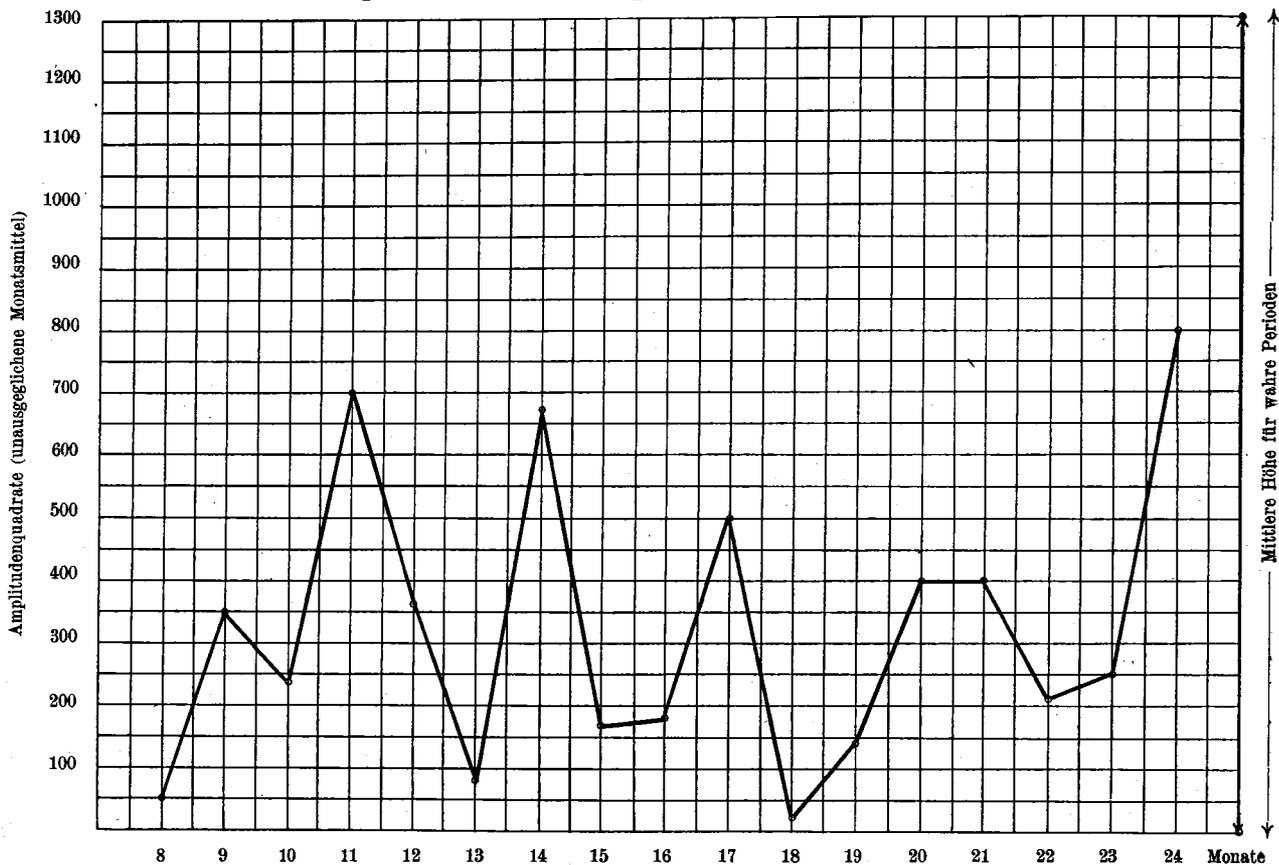


Tabelle V.

**Die
scheinbaren Perioden.**

$$\tau' = 1 \pm \frac{1.43}{n}$$

n	τ	τ_1	τ_2
54	8 Mon.	8.2	7.8
48	9 "	9.3	8.3
43	10 "	10.3	9.7
39	11 "	11.4	10.6
36	12 "	12.5	11.5
33	13 "	13.6	12.4
30	14 "	14.7	13.3
28	15 "	15.8	14.2
27	16 "	16.9	15.2
26	17 "	17.9	16.1
24	18 "	19.1	17.0
22	19 "	20.2	17.8
21	20 "	21.4	18.6
20	21 "	22.5	19.5
19	22 "	23.6	20.3
18	23 "	24.8	21.3
18	24 "	25.9	22.2
62	42 Pent.	42.9	42.0
64	41 "	41.8	40.2
65	40 "	40.8	39.1
67	39 "	39.9	38.2
69	38 "	38.8	37.2
71	37 "	37.7	36.3
75	36 "	36.7	35.3
75	35 "	35.7	34.3
77	34 "	34.6	33.4
79	33 "	33.6	32.4
84	32 "	32.5	31.4
84	31 "	31.5	30.5
87	30 "	30.4	29.5

Das Periodogramm zeigt folgenden Charakter: Sämtliche Erhebungen liegen weit unter der geforderten Grenze. Stellen, die ein „band“ aufzuweisen scheinen, sind kaum vorhanden — das Periodogramm bestätigt in augenfälliger Weise das negative Resultat der Rechnung.

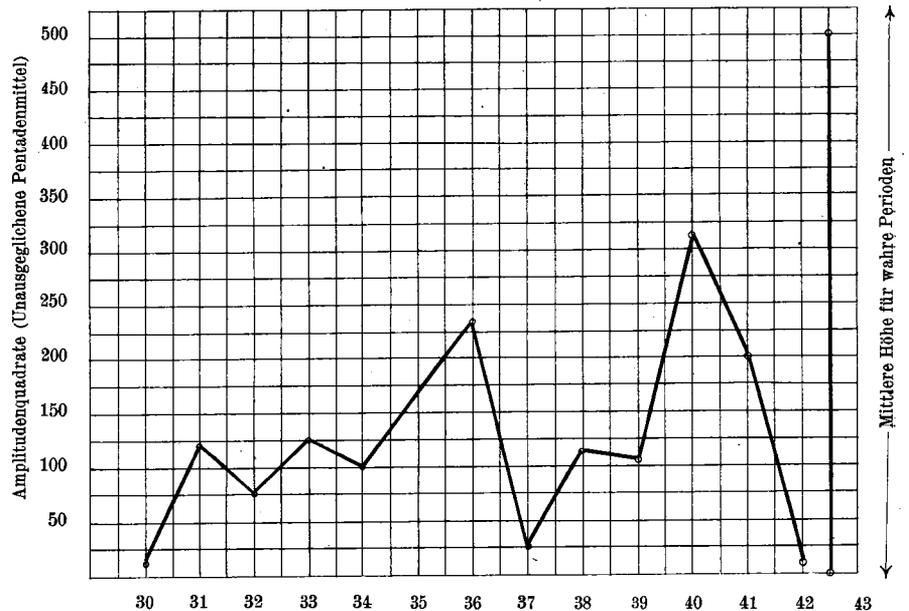
Wir versuchen es daher mit kleineren Periodenlängen und legen der neuen Rechnung die Pentadenmittel zu Grunde, da es aussichtslos wäre, aus einer verhältnismässig geringen Zahl von Funktionswerten, deren Periode bestimmen zu wollen. Der Gang der Rechnung ist genau derselbe wie der eben beschriebene und führt schliesslich zu den, in der zweiten Hälfte der Tabelle IV gegebenen Resultaten, welche wieder in gleicher Weise zu interpretieren sind.

Das kleinste ρ ist hier 0.0078, das grösste 0.0513, das mittlere 0.0301.

Wir haben also mit den Werten $\frac{0.0513}{0.0301} = 1.71$ und $\frac{0.0078}{0.0301} = 0.259$ in die Tabelle Seite 11 einzugehen und finden als zugehörige Funktionswerte 0.1062 und 0.9318, genau wie vorher, also wiederum, dass von 9.4 Fällen noch ein grösseres ρ als unser grösstes zu erwarten wäre, und von 14.6 Fällen noch ein kleineres als unser kleinstes, bei willkürlicher Anordnung der Zahlen, was wiederum die Existenz wahrer Perioden ausschliesst. Für diese zweite Versuchsreihe wurde wieder das Periodogramm aufgenommen, Figur 2, und die scheinbaren Perioden berechnet, welche die zweite Hälfte von Tabelle V enthält.

Fig. 2

Periodogramm für Versuchsperioden von 20 bis 12 Pentaden



Der Verlauf des Periodogramms ist hier jedoch wesentlich anders. Die mittlere Höhe desselben liegt zwar auch unterhalb der Grenze, die man für wahre Perioden fordern muss; doch scheint in der Umgebung derjenigen Funktionswerte, die zu den Abszissen 31 bis 34 Pentaden gehören ein „band“ mit einer gewissen Deutlichkeit ausgeprägt, namentlich, da das langsame Ansteigen bis zum Punkte, dessen Abszisse = 36 Pentaden durch die zu 34 und 35 gehörigen, scheinbaren Perioden 34.6, 35.7 gedeutet werden kann. Bei den Amplitudenquadraten, die zu den Versuchsperioden 38, 39 Pentaden gehören ist ausserdem, wie ein Blick auf das Periodogramm zeigt, ein weiteres „band“ angedeutet, wenn auch äusserst schwach. Der bis zur Abszisse 40 ansteigende Ast kann wiederum durch die zu 39 Pentaden gehörige, scheinbare Periode 39.9 erklärt werden. Von einer deutlich ausgesprochenen Periodizität ist bei solchem Verhalten des Periodogramms immerhin noch keine Rede, doch könnten wir andererseits auch versucht sein, die fraglichen Stellen einzeln noch eingehender zu untersuchen, bevor wir das Verhalten der Kurve für

Tabelle VI. Ausgegli

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
1877	16	15	12	9	6	6	8	10	10	9	10	9	7	4	3	4	6	9	12	14	16	17	16	15	14	13	13	12	11	10	12	12	10	9	8	6	
78	3	6	8	7	7	6	5	4	4	6	6	6	5	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0	3	7	10	11	11	10	9	5	3	2	2	1	0	
79	1	1	1	1	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	3	5	6	6	6	7	5	3	2	2	2	2	2	2	3	5	7	8	9	9	9	
80	18	22	23	26	19	20	19	16	13	14	15	14	15	16	15	14	14	15	17	13	13	18	17	18	19	18	17	19	22	26	27	28	29	27	25	23	
81	31	36	34	40	42	42	38	35	39	48	53	50	51	52	46	40	43	47	46	46	44	41	37	37	44	44	51	54	55	55	56	57	58	58	60	64	
82	51	55	61	68	72	69	65	65	65	63	64	68	74	77	79	87	93	92	87	89	88	78	70	64	60	54	43	34	32	39	47	51	51	51	54	53	
83	47	44	48	50	48	44	40	34	30	28	31	38	46	50	63	72	78	79	74	67	61	51	41	33	32	39	43	44	51	70	74	70	67	67	82	85	
84	98	91	84	86	89	91	94	97	103	106	107	102	96	92	84	76	76	81	83	80	81	81	77	75	77	79	77	78	71	66	62	63	64	63	60	59	
85	51	56	64	73	78	76	79	83	82	75	64	59	53	49	51	52	54	57	60	64	64	63	68	73	76	75	75	82	90	90	90	90	89	88	83	80	
86	33	31	27	22	21	24	32	41	43	43	46	50	53	56	53	45	50	44	40	41	45	49	49	45	40	33	32	27	24	27	29	29	28	29	29	30	
87	12	12	12	13	13	12	12	11	11	11	10	8	7	7	7	7	6	7	9	14	19	22	25	25	24	22	20	19	18	19	18	20	23	21	20	21	
88	13	12	9	6	6	8	9	9	11	13	13	10	10	11	9	6	4	6	8	7	7	10	11	10	8	9	9	9	7	7	9	9	9	9	8	7	
89	2	3	4	3	3	5	6	6	8	10	9	7	6	6	5	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	0	1	4	5	6	6	7	8	9	9	
90	5	4	3	2	1	1	2	3	5	5	5	5	4	4	2	2	3	3	3	4	4	5	7	8	7	8	8	6	4	3	3	4	6	7	8	10	
91	14	15	18	23	27	28	27	27	26	22	17	12	11	11	12	15	19	24	27	30	34	39	42	47	49	48	45	47	50	53	52	61	68	72	72	69	
92	61	62	70	79	78	74	68	62	54	43	39	44	50	51	50	51	55	62	67	72	75	72	77	78	81	82	82	84	88	90	82	75	74	72	62	56	
93	71	69	74	81	83	80	76	76	74	68	66	69	72	73	77	83	87	91	97	102	102	101	99	97	94	100	107	111	113	112	108	104	111	117	116	110	
94	83	83	86	84	80	79	79	76	72	65	56	52	57	65	69	70	75	81	81	80	81	92	103	103	100	101	105	107	104	102	99	101	103	104	106	110	
95	67	70	70	72	73	73	68	66	68	71	70	64	60	61	61	62	65	73	76	72	67	64	65	67	68	73	78	83	83	75	71	69	69	66	59	52	
96	29	32	36	37	42	51	57	59	59	58	56	51	44	52	54	51	47	44	37	28	24	25	26	26	28	31	35	43	47	49	49	44	43	46	49	50	
97	42	42	39	34	29	28	29	28	28	29	30	30	28	30	34	36	35	33	32	29	22	17	18	20	18	14	12	13	13	12	14	18	22	25	28		
98	30	29	31	33	35	38	44	56	54	43	40	38	32	22	16	14	12	13	15	17	18	21	25	26	26	26	23	22	22	22	21	17	15	13	12	10	
99	19	17	15	13	11	11	19	14	6	10	16	18	19	20	21	20	16	20	14	12	10	17	8	8	8	9	13	16	17	18	22	23	23	20	18	16	
1900	10	15	19	18	17	15	16	13	7	5	6	7	9	8	8	8	10	13	19	21	21	21	20	17	13	9	8	8	11	12	13	12	12	12	12	10	
1	1	2	2	2	2	2	3	5	5	5	5	5	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	8	11	11	12	10	9	9	9	9	8	6	3	
2	5	4	1	0	0	0	3	8	7	13	13	13	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	3	1	1	1	1	1	1
3	9	9	11	14	15	16	17	16	14	11	20	11	15	18	21	23	23	25	27	26	23	22	22	29	22	9	10	11	14	17	17	20	25	28	27	26	
4	30	28	29	29	25	23	25	25	25	26	30	35	38	40	41	43	43	43	45	48	51	52	49	43	38	35	33	34	39	42	43	44	43	42	44	46	
5	60	72	82	83	81	82	86	81	69	62	61	60	53	43	42	44	42	40	39	42	45	48	50	47	45	45	44	41	39	42	46	46	52	65	78	80	
6	46	45	43	42	41	35	30	30	34	41	43	45	54	62	65	62	59	58	52	46	46	48	51	55	60	65	65	61	67	57	65	74	81	92	105	109	
7	77	83	82	96	99	105	106	103	95	85	75	63	56	55	51	48	49	51	48	44	46	47	48	45	43	38	31	33	39	40	41	42	45	50	51	49	
8	38	35	33	33	32	33	33	32	31	31	33	32	32	40	47	45	45	51	58	62	63	63	60	45	42	41	42	42	41	44	47	44	38	34	34	39	
9	57	56	55	57	55	51	52	56	55	53	58	64	61	57	55	54	49	39	31	31	37	41	40	36	33	32	28	24	23	22	23	22	20	20	25	33	
10	24	20	20	23	28	31	32	35	38	36	30	23	20	16	13	12	10	9	9	11	13	16	20	22	23	23	21	17	12	11	13	14	16	16	17	16	
11	3	2	2	5	7	8	11	13	13	10	8	8	9	11	12	12	13	16	15	13	13	12	11	10	8	6	5	5	4	3	2	2	3	4	4	4	

ebene Pentaden-Mittel.

38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73		
4	3	2	2	3	4	5	8	11	13	13	12	11	8	5	3	2	4	8	10	11	11	12	12	9	7	6	5	4	3	1	1	1	1	1	1	2	1877
0	0	0	0	0	1	3	3	3	3	2	1	0	0	0	1	2	2	2	2	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	78
4	3	4	5	6	9	12	12	11	10	9	7	6	7	9	12	14	12	12	13	13	11	10	11	13	11	7	7	8	7	7	8	13	17	17	17	79	
19	21	29	36	37	38	39	43	46	45	47	53	58	56	50	47	45	39	33	30	26	23	22	23	23	23	25	24	23	22	22	21	21	23	26	28	80	
71	65	65	59	53	50	48	47	51	50	53	46	44	46	46	43	53	53	47	43	44	45	44	43	46	49	44	47	43	42	41	40	39	39	42	47	81	
46	45	42	38	38	40	46	51	52	51	49	52	53	51	50	54	51	54	54	53	62	63	66	75	75	69	67	63	50	44	43	43	47	47	50	52	82	
79	76	65	59	50	52	60	67	72	73	68	60	51	53	63	67	74	85	97	98	95	98	102	99	88	79	73	68	69	75	85	99	110	111	104	100	83	
61	59	59	62	65	64	59	56	58	63	67	68	73	77	74	67	62	61	57	51	51	52	49	44	42	46	47	47	51	54	54	52	48	45	44	47	84	
71	70	68	64	59	57	58	53	46	42	41	39	36	36	30	29	35	37	33	37	41	46	44	37	31	27	22	17	18	23	28	33	35	45	43	37	85	
31	32	32	29	23	17	15	16	21	26	28	27	25	22	16	11	15	15	8	6	5	4	2	1	1	2	3	5	9	15	18	19	18	16	15	12	86	
29	28	29	32	31	24	17	13	11	11	11	12	13	12	10	9	10	11	10	11	13	13	10	8	9	11	13	17	22	24	24	22	19	18	16	15	87	
6	6	5	6	6	7	11	14	15	15	15	15	11	7	5	4	3	3	3	5	8	11	12	12	13	14	11	9	10	9	7	5	4	3	2	1	88	
17	21	23	22	20	18	16	12	7	5	6	6	5	5	5	6	5	3	2	1	1	0	0	0	1	0	0	2	4	6	8	9	10	10	9	6	89	
15	13	12	11	11	12	11	13	24	26	20	19	17	15	13	12	14	15	14	14	15	14	11	10	10	10	10	13	14	11	12	10	9	6	7	11	90	
63	62	55	47	41	41	44	46	41	49	53	56	59	61	62	59	56	54	48	42	37	37	41	42	38	34	33	31	28	29	37	45	48	54	62	69	91	
76	81	79	78	78	69	56	50	51	53	55	60	69	75	74	72	71	66	60	55	52	50	50	52	57	64	69	68	66	66	65	61	55	57	63	69	92	
112	111	99	95	95	96	87	78	81	83	86	88	86	81	79	83	85	85	80	77	78	79	78	74	75	74	65	58	63	80	91	95	100	106	103	92	93	
108	100	91	84	75	68	64	63	67	65	64	66	70	76	74	71	71	72	69	61	55	53	54	54	56	58	57	56	56	58	56	53	53	52	52	58	94	
55	60	62	65	68	71	71	63	54	51	52	60	71	75	73	70	71	78	78	68	61	62	59	50	41	44	54	60	65	70	72	67	57	45	35	29	95	
43	38	31	26	24	27	30	35	46	57	63	62	59	54	42	32	28	29	30	34	41	43	39	38	39	41	38	36	38	41	43	43	44	46	46	43	96	
29	30	28	25	24	23	27	33	35	38	44	48	46	39	34	31	23	16	11	8	7	6	6	8	12	19	27	32	33	33	33	29	23	22	28	31	97	
19	27	32	34	34	31	24	26	29	31	32	34	38	38	33	30	30	33	35	38	39	39	37	32	26	20	16	15	15	13	13	15	18	18	19	19	98	
10	6	3	3	3	3	3	3	4	5	6	7	8	10	9	8	9	12	13	13	15	17	15	10	9	10	11	12	11	10	10	8	7	6	7	8	99	
8	10	9	6	4	5	7	8	8	8	8	8	6	4	4	7	11	12	12	11	9	8	6	6	7	6	5	4	2	1	0	0	0	0	0	0	1900	
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	3	3	4	5	5	4	4	3	3	2	0	0	2	5	6	6	6	1	
1	1	1	2	2	2	2	1	2	5	7	10	13	15	15	16	14	13	12	10	12	13	12	10	10	10	7	3	1	2	3	4	4	5	7	2		
28	29	32	34	32	29	27	21	14	11	10	11	20	24	33	36	37	39	45	49	48	47	47	45	42	40	40	43	46	46	44	38	31	28	30	33	3	
50	54	54	44	49	56	58	53	47	45	43	34	29	34	41	45	47	51	55	52	46	42	42	40	38	42	54	62	62	58	55	51	46	46	50	52	4	
74	76	66	54	54	59	61	59	60	59	55	55	60	64	64	76	85	79	76	78	88	92	94	103	106	99	86	77	70	61	52	47	45	41	38	42	5	
86	74	64	52	46	48	52	58	62	66	65	58	53	50	42	33	26	22	18	16	21	27	30	37	44	47	47	54	62	64	67	72	76	78	77	76	6	
54	55	54	55	55	55	58	66	72	74	78	83	83	77	74	77	76	69	64	66	68	66	63	62	59	59	51	49	47	48	51	53	50	46	43	41	7	
42	48	60	70	73	68	78	93	92	90	73	57	62	68	64	54	44	35	27	25	31	40	45	46	46	45	37	31	32	37	41	43	44	45	45	51	8	
39	41	42	36	27	23	23	26	29	30	34	38	43	48	56	61	60	60	61	58	49	44	47	53	57	55	51	52	54	58	54	47	46	42	36	30	9	
13	14	15	15	14	12	13	12	10	12	17	25	32	33	34	37	41	39	32	28	25	22	14	6	4	4	6	6	6	6	7	7	6	5	4	4	10	
3	3	4	4	4	4	6	6	5	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	2	1	2	2	4	4	3	3	4	4	3						11		

ein rein zufälliges halten. Umso mehr, als die kritischen Werte 34, 35, 36, 38, 39, 40 Pentaden so nahe beieinander liegen, dass man vermuten könnte, die Länge der zu suchenden Periode besitze ungefähr den mittleren Wert dieser Zahlen und das Periodogramm deute im Grunde nur eine einzige Periode an, von mittlerer Amplitude und mittlerer Länge.

Zu diesem Zwecke wurde nun der ganze Verlauf der Fleckenhäufigkeit der betrachteten 35 Jahre in Tafel I—VII graphisch dargestellt und zwar wurden in einer ersten Kurve die Pentadenmittel, welche Tabelle III enthält, als Ordinaten genommen, die Pentaden selbst, als Abszissen. Im weiteren wurde aber noch eine zweite Kurve hergestellt, welche die Rotationsperiode von rund 30 Tagen = 6 Pentaden eliminiert. Die Ausgleichung geschah so, dass die Werte der ersten bis sechsten; zweiten bis siebenten, usw. Pentade jeweils arithmetisch combinirt wurden und aus je zwei aufeinanderfolgenden dieser Mittel wieder das Mittel gebildet wurde, um auf die mittlere Epoche zu gelangen. Diese „ausgeglichenen Relativzahlen“, welche der ausgeglichenen Kurve zu Grunde liegen enthält die Tabelle VI. Die Kurve ist in das gleiche Netz wie die erste eingetragen, so dass der Verlauf beider parallel miteinander untersucht werden kann. Zur leichteren Schätzung von Zeitabschnitten wurde ferner die Einteilung nach Jahren aufgegeben, da sonst nach je 73 Pentaden die Zählung von vorn hätte beginnen müssen, was mit manchen Unbequemlichkeiten verbunden gewesen wäre. Es wurden daher je 5 Jahre zu 365 Pentaden zusammengefasst, so dass das betrachtete Intervall in 7 Zeitabschnitte von je 365 Pentaden zerfällt, nämlich von 1877 bis 1881, von 1882 bis 1886, von 1887 bis 1891, von 1892 bis 1896, von 1897 bis 1901, von 1902 bis 1906, von 1907 bis 1911. Die Jahreszahlen wurden zur bloss rohen Orientierung ausserdem noch an gewissen acqidistanten Stellen beigeschrieben.

Durchgehen wir nun die Kurven, so lässt sich das zeitweise Auftreten einer Periode von zirka 40 Pentaden durchaus erkennen. Da aber andererseits die analytische Untersuchung viel zu kleine Werte für die Amplitude geliefert hatte, so müssen wir schliessen, dass diese Periode in der Tat nur während begrenzter Zeiträume besteht, dann vorübergehend unbemerkbar bleibt und später wieder mit anderer Phase sich geltend macht, und dass ausserdem die Länge der Periode variabel sein muss.

Bei einem solchen Verhalten ist alsdann das scheinbare Verschwinden der Periodizität bei Zusammenfassung eines ausgedehnten Materials ganz natürlich, da sich die übereinandergelagerten Werte in in solchem Maße gegenseitig ausgleichen, dass die Periodizität völlig verwischt erscheint.

Es zeigt sich jetzt also die Notwendigkeit, die einzelnen Zeitabschnitte, für sich getrennt, nochmals in analoger Weise zu behandeln.

Zu diesem Zwecke wurden die Kurven auf die supponierte Periode systematisch durchsucht, d. h. es wurden sämtliche gut ausgesprochene Maxima in dem erwähnten Intervall von 30 bis 40 Pentaden in ihrer zeitlichen Folge notiert und die Reihe ihrer Differenzen gebildet. Dort, wo sich zwei Maxima in kurzen Intervallen folgen oder mehrere Maxima sich gruppenweise zusammendrängen (z. B. von 1890—96), wurden jeweils nur die mittleren gewählt. Man mag diesem Verfahren vielleicht einige Willkür vorwerfen, es führt aber bei wiederholter unabhängiger Durchsuchung immer wieder auf wenig voneinander verschiedene Mittelwerte. Der ganzen Reihe wurden die ausgeglichenen Kurven zugrunde gelegt, die unausgeglichenen nur an zweifelhaften Stellen mit zu Rate gezogen.

Die so erhaltene, definitiv angenommene Reihe der Maxima gibt Tabelle VII samt den aufeinander folgenden Zwischenzeiten. Zu den Zeiten minimaler Fleckentätigkeit wurden die Reihen abgebrochen, da hier das Zufällige im Charakter der kleinen Oszillationen zu sehr zur Geltung kommt und es unmöglich macht, Wesentliches von Unwesentlichem zu unterscheiden. Die Reihen beziehen sich also auf die drei Perioden stärkerer Fleckentätigkeit, die im gesamten Intervall von 1877 bis 1911 enthalten sind, nämlich

(1) von 1880—87	7 Jahre	
(2) von 1890—99	9 „	
(3) von 1902—11	9 „	

Der Mittelwert der Periodenlänge ergibt sich im 1. Intervall zu 36, im 2. zu 33, im 3. zu 31 Pentaden.

Nun wurde mit verschiedenen äquidistanten Versuchsperioden in der Nähe dieser Mittelwerte das analytische Verfahren nochmals vorgenommen mit wesentlich besserem Erfolg als früher, wie Tabelle VIII zeigt. Die Tabelle enthält drei Spalten, entsprechend den drei Zeitabschnitten. Die Horizontalreihe „Periode“ gibt die Pentadenzahl der Versuchsperiode, unter A^2 stehen die zugehörigen Ordinaten des Periodogramms. Darunter stehen die Werte der berechneten und der aus dem Beobachtungsmaterial gefundenen, beobachteten Phase, welche sich dadurch ergibt, dass man in $S = a_0 + r_1 \cos(\alpha - \varphi)$, $\alpha = \varphi$ setzt; $\cos(\alpha - \varphi) = 1$, also das zugehörige $S = S_{max}$.

Tabelle VII.

I.			II.			III.		
Jahr	Max.	Diff.	Jahr	Max.	Diff.	Jahr	Max.	Diff.
1880	226		1890	269		1902	55	
	272	46	1891	301	32	1903	95	40
1881	306	34		339	38		117	22
	333	27	1892	7	33		138	21
1882	22	54		33	26	1904	171	33
	65	43		73	40		193	22
1883	103	38	1893	110	37	1905	225	32
1884	147	44	1894	147	37		258	33
	200	53		180	33		284	26
1885	230	30	1895	228	48	1906	310	26
	253	23		251	23		337	27
	287	34		276	25	1907	10	28
1886	309	22	1896	307	31		53	43
	343	34		327	20	1908	97	44
	365	22		343	16		122	25
1887	44	49	1897	19	41	1909	161	39
	71	27		52	33		189	28
				84	32		211	22
			1898	127	43	1910	231	20
			1899	164	37		276	45
						1911	315	39
		36.			33			31

Tabelle VIII.

	I. 1880—87			II. 1890—99				III. 1902—11		
Periode	32	36	40	28	32	36	40	28	32	36
A^2	2.4	6.0	7.9	2.0	1.1	1.7	1.8	3.8	3.0	2.5
φ ber.	32° 40'	13° 20'	80° 10'	311° 15'	65° 17'	351° 25'	317°	10° 20'	12° 55'	168°
φ beob.	101° 15'	10°-20°	81°	ca. 333°	ca. 160°	ca. 0°	ca. 63°	12° 51'	337°-11°	ca. 200°

Der zu S_{max} gehörige Winkel α ist also gleich der beobachteten Phase, $\varphi_{beob.}$, zum Unterschiede von der berechneten, $\varphi_{ber.}$, welche sich aus der Gleichung $\frac{b_1}{a_1} = \text{tg } \varphi$ ergibt.

Im Falle I sehen wir ein sukzessives Anwachsen der Amplitude bis zu dem Punkt, in welchem zugleich die berechnete und beobachtete Phase zusammenfallen, also bei einer Versuchsperiode von 40 Pentaden. Die Koinzidenz der $\varphi_{ber.}$ und $\varphi_{beob.}$ kann aber in Fällen von so geringer Amplitude schon allein als Kriterium für die Periodizität gelten.

Im Falle II ist der Verlauf nicht so klar ausgesprochen, wie nach dem Verlauf der Kurven von 1890—96, nämlich nach dem häufigen paar- oder gruppenweisen Auftreten der Maxima, vorauszusehen war.

Die Amplituden sind dort nahezu gleich: 2.0, 1.1, 1.7, 1.8, die Koinzidenz der Phase zum mindesten an zwei Stellen fraglich. Die besten Werte scheint die Versuchsperiode von 36 Pentaden zu geben.

Fall III ist wiederum ähnlich wie Fall I: Ein deutliches Anwachsen der Amplitude erfolgt gleichzeitig mit einem Näherrücken der berechneten an die beobachtete Phase bis zur vollkommenen Koinzidenz bei 28 Pentaden.

Damit wäre also im Zeitraum

- 1880—87 eine Periode von 40, im Zeitraum von
- 1890—99 " " " 36, " " "
- 1902—11 " " " 28 Pentaden wahrscheinlich gemacht.

Zu ihrer Diskussion im einzelnen wurden diese 3 Perioden in Fig. 3, 4 und 5 wieder graphisch dargestellt, samt ihren benachbarten Versuchsperioden. Als Abszissen wurden wiederum die Pentaden genommen, als Ordinaten die Grössen M des gegebenen Rechnungsschemas, die sich aus den Summen der Vertikal-kolonnen S durch Division mit der, der Rechnung zugrunde gelegten Anzahl von Horizontalreihen ergeben. Die Hauptkurven sind stark, die benachbarten schwächer ausgezogen. Die Kurven zeigen nun alle drei ein äusserst merkwürdiges Verhalten, indem sie alle auf noch kürzere Periodenlängen zu deuten scheinen.

Betrachten wir zunächst die Hauptkurven, so zeigen Fig. 4 und Fig. 5 in ihrem ersten Teil überraschend ähnlichen Verlauf, in Fig. 3 finden wir ebenfalls denselben typischen Kurvenast, nur mit einer um 180° verschobenen Phase. Und zwar erinnert das Kurvenstück an eine einfache sinus-Kurve.

Ziehen wir aber auch die Nebenkurven in Betracht, die zu benachbarten Periodenlängen gehören, so finden wir auch dort so klar ausgeprägte sinusähnliche Kurven, dass wir diesen Umstand keinem blossen Zufall zuschreiben dürfen, sondern auf eine, und zwar auf eine sehr deutlich ausgesprochene, Periodizität schliessen müssen, von kürzerer Länge, als zur Herstellung der Hauptkurven Fig. 3, 4, 5 angenommen wurde.

Es wurden daher in Tabelle IX noch sämtliche aus Fig. 3, 4, 5 aufgefundenen, deutlich ausgeprägten Periodizitäten zusammengestellt, um zu einer Schätzung der mittleren Periodenlänge zu gelangen.

Fig. 3

Zeitraum I 1880—87

- a 32 Pentaden
- b 36 " "
- c 40 " Hauptkurve

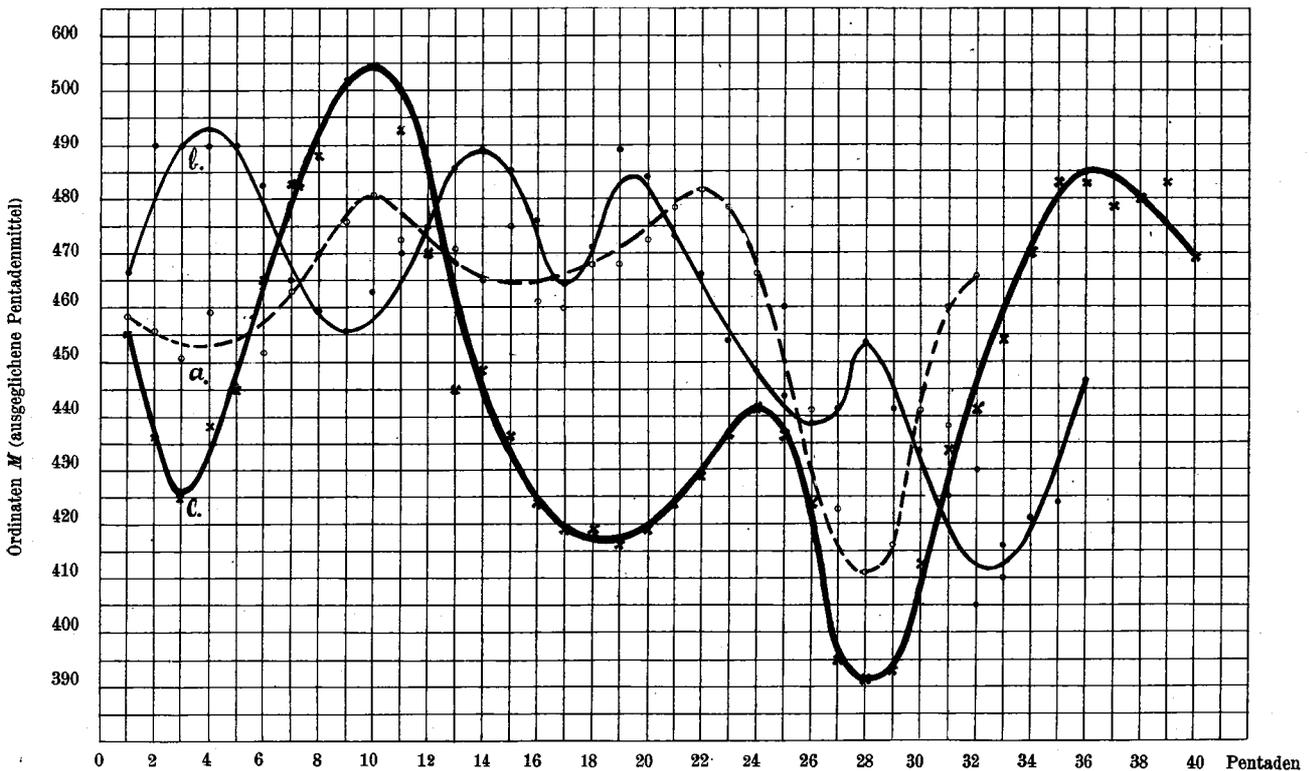


Fig. 4

Zeitraum II 1890-99

- a 28 Pentaden
- b 32 "
- c 36 " Hauptkurve
- d 40 "

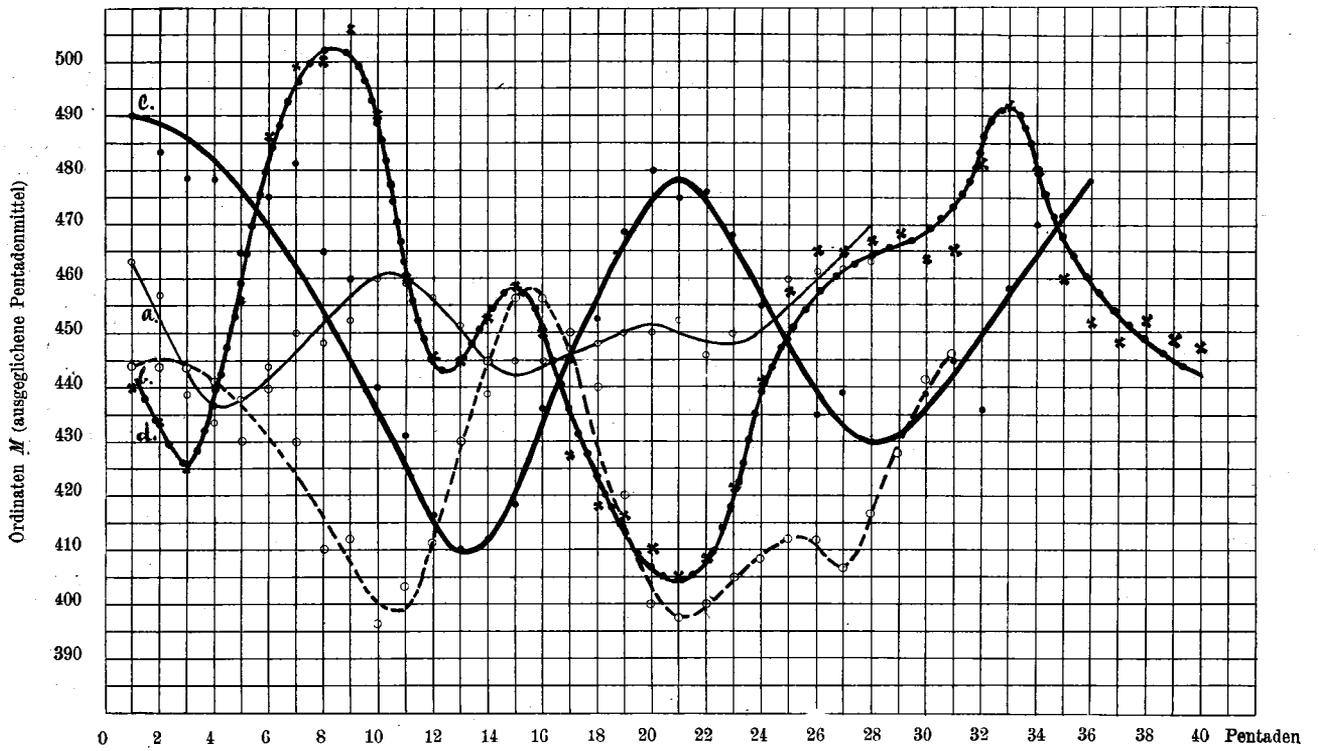


Fig. 5

Zeitraum III 1902-10

- a 36 Pentaden
- b 32 "
- c 28 " Hauptkurve

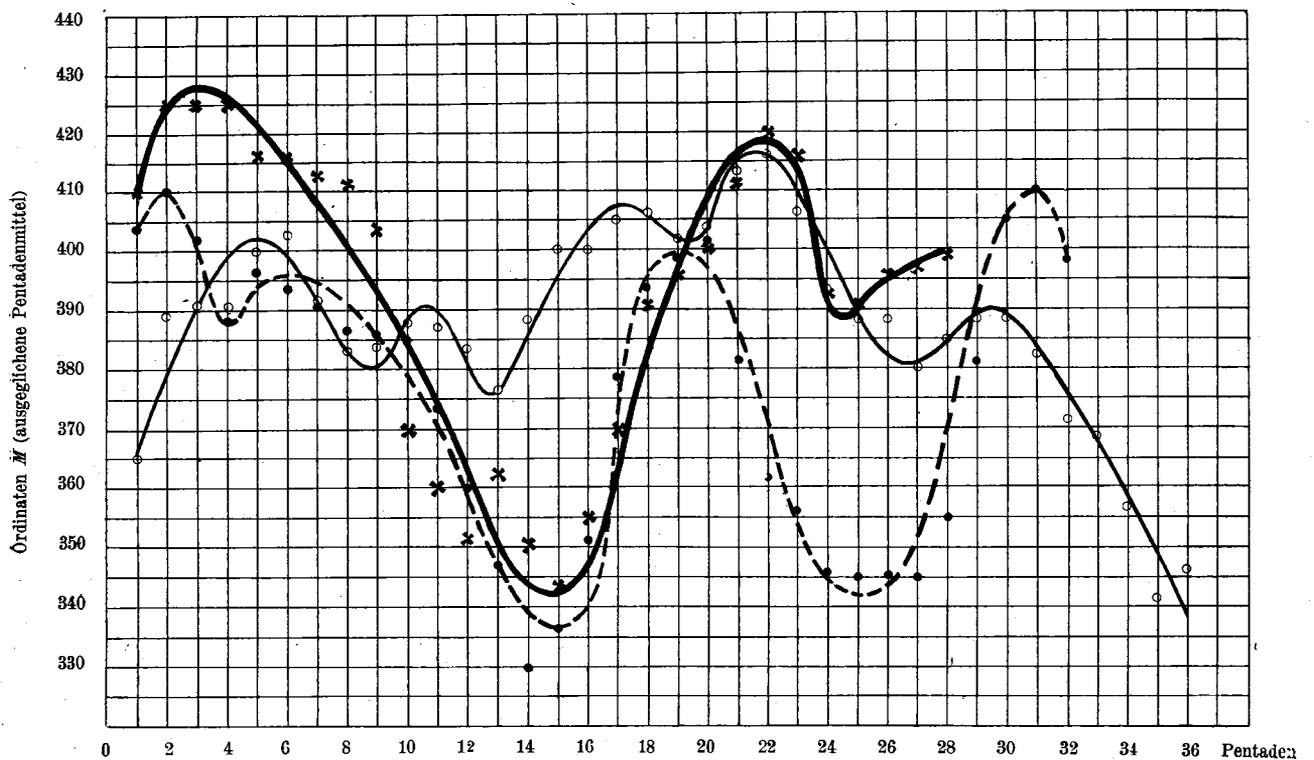


Tabelle IX.

Fig.	Kurve	Anfang der Periode	Ende der Periode	Perioden- länge
3	<i>a</i>	1	12	11
	<i>b</i>	26	36	10
	<i>c</i>	1	13	12
4	<i>a</i>	2	13	11
	<i>b</i>	7	19	12
	<i>c</i>	10	26	16
	<i>d</i>	4	24	20
5	<i>a</i>	3	22	19
	<i>b</i>	10	22	12

13.7 Pentaden = 68.5 Tage.

Wir kommen also auf einen Mittelwert von 68.5 Tagen für die Länge der angedeuteten Periode in bemerkenswerter Übereinstimmung mit der von Joh. Unterweger aufgefundenen Periode von 69.4 Tagen, unter Benützung eines vollkommen anderen Zahlenmaterials und anderer Rechnungsmethoden. Auf eine durchgreifende Untersuchung dieser zweiten Periode musste hier aber verzichtet werden — und über den Erfolg einer solchen kann auch zum voraus nichts ausgesagt werden. Jedenfalls müsste, da sie während der 3 verschiedenen Epochen zu bestehen scheint, wiederum der gesamte verfügbare Zeitraum in Betracht gezogen werden und wiederum das Periodogramm für eine grössere Reihe benachbarter Werte hergestellt werden, um mit Hilfe der Wahrscheinlichkeits-Rechnung den Verlauf desselben zu interpretieren. Und ausserdem müsste, nachdem eine Amplitude in erster Näherung gefunden wäre, der Einfluss der vernachlässigten Glieder in Betracht gezogen werden, über den zunächst nichts bekannt ist.

Es fragt sich, nach alledem und besonders wegen der Tatsache, dass hier eine Periode durch die graphische Darstellung einer andern aufgefunden wurde, welche der Analyse notwendig entgehen musste darum, weil die Versuchsperioden auf andere Werte beschränkt wurden, es fragt sich, ob nicht eine direkte vollkommene Analyse nach der Methode von Kühnen besser zum Ziele führen könnte?

Doch ist darauf zu sagen, dass die Methode zahllose Unterperioden von ganz geringen Amplituden, die daher bedeutungslos für uns sind, mit der gleichen Genauigkeit liefert wie die Hauptperioden und dass dieses Ergebnis den ausserordentlich grossen Rechnungsaufwand kaum rechtfertigen würde.

Fassen wir das Ergebnis dieser Untersuchung zusammen, so finden wir:

1. Es existiert wahrscheinlich eine Periode von ungefähr 40 Pentaden = 200 Tagen. Sie lässt sich während der 3 letzt abgelaufenen elfjährigen Fleckenperioden jeweils so lange verfolgen, als die Fleckentätigkeit nicht unter eine gewisse Grenze sinkt; es ist aber nicht möglich sie über die Minimalzeiten hin ebenfalls als bestehend nachzuweisen.

Ihre Länge ist beträchtlich variabel, schwankt aber um einen Mittelwert von ziemlich guter Konstanz in der Nähe von 30–40 Pentaden.

2. Die Ordinate ihres Periodogramms ist ungefähr 100 mal kleiner als die der elfjährigen Periode, also ihre Amplitude etwa 10 mal kleiner als die Amplitude der elfjährigen.
3. Es ist eine weitere Periode angedeutet von 13.7 Pentaden = 68.5 Tagen, deren genauer Nachweis einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben muss.
4. Es sei dahin gestellt, ob, oder wie weit es ein Zufall ist, dass die Längen der beiden betreffenden Perioden, nämlich 200 Tage und 68.5 Tage, an die siderischen Umlaufzeiten der beiden inneren Planeten Venus und Merkur erinnern, nämlich an 224.7 Tage und 87.9 Tage.



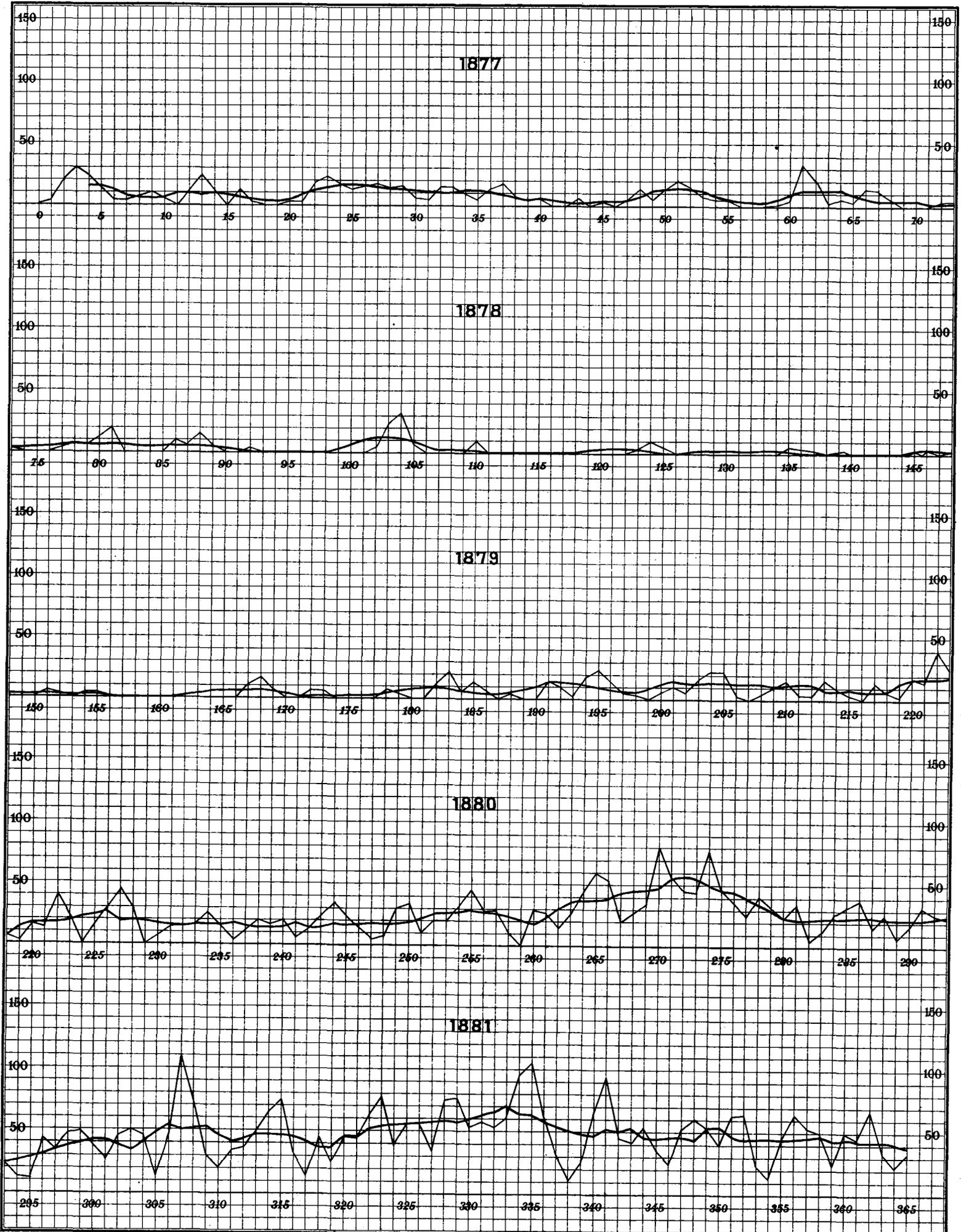
Tafeln I—VII.

—

Beobachtete und ausgeglichene Pentadenmittel der täglichen Relativzahlen.

Publikationen d. Sternwarte d. eidg. Polyt. Bd. V 2.

Tafel I.



Beobachtete und ausgeglichene Pentadenmittel der täglichen Relativzahlen.

Publikationen d. Sternwarte d. eidg. Polyt. Bd. V 2.

Tafel II.



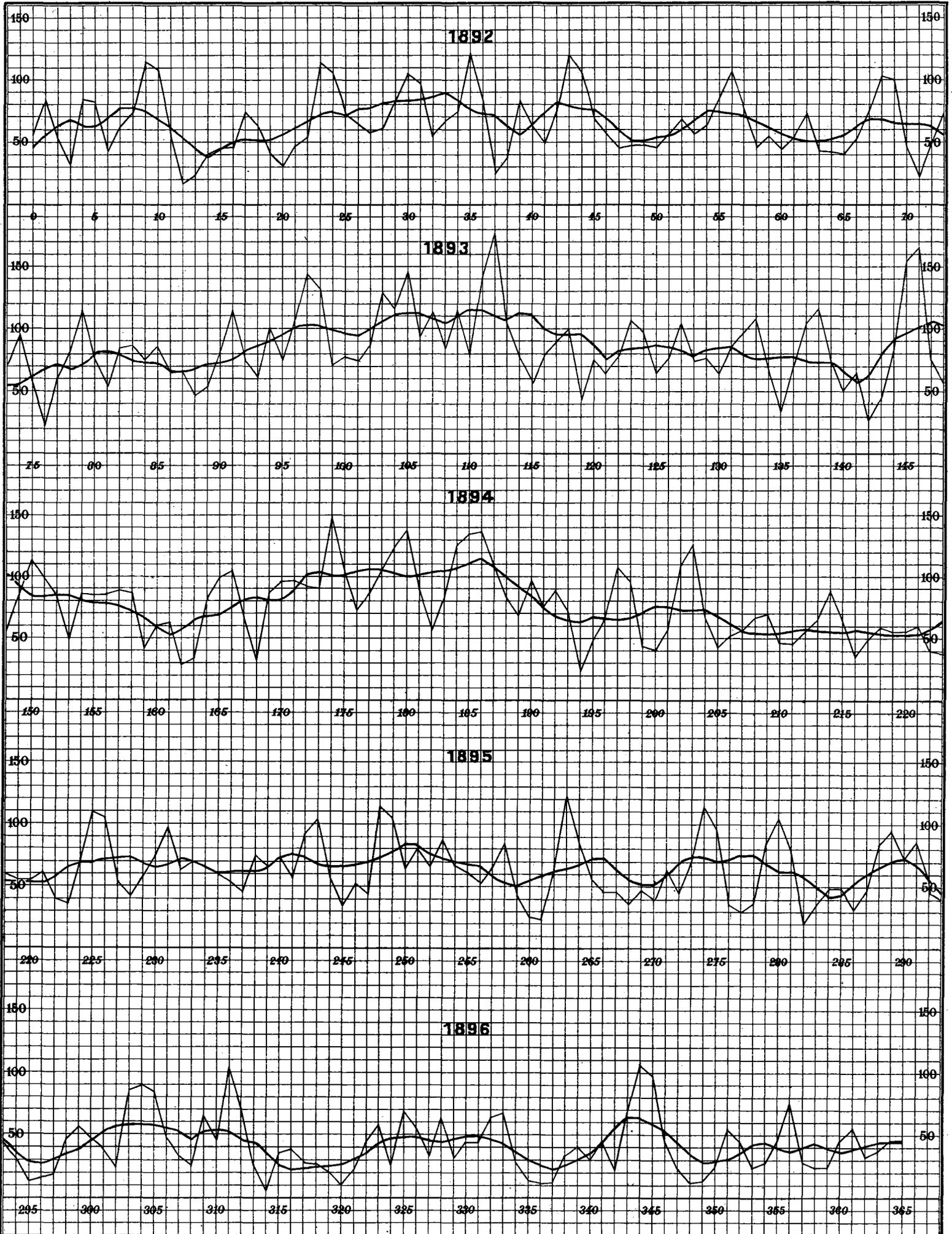
Beobachtete und ausgeglichene Pentadenmittel der täglichen Relativzahlen.

Publikationen d. Sternwarte d. eidg. Polyt. Bd. V 2.



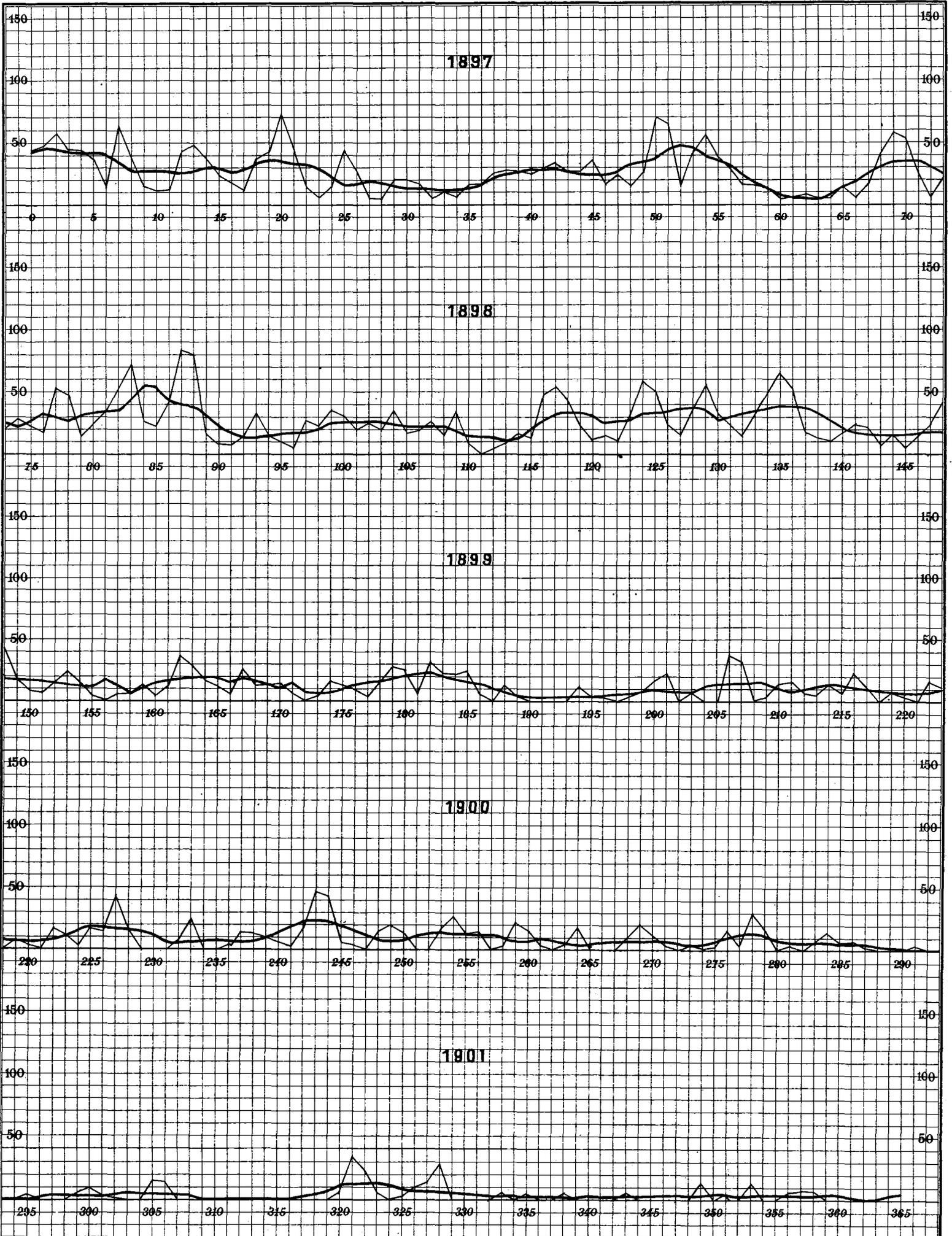
Beobachtete und ausgeglichene Pentadenmittel der täglichen Relativzahlen.

Publikationen d. Sternwarte d. eidg. Polyt. Bd. V 2.



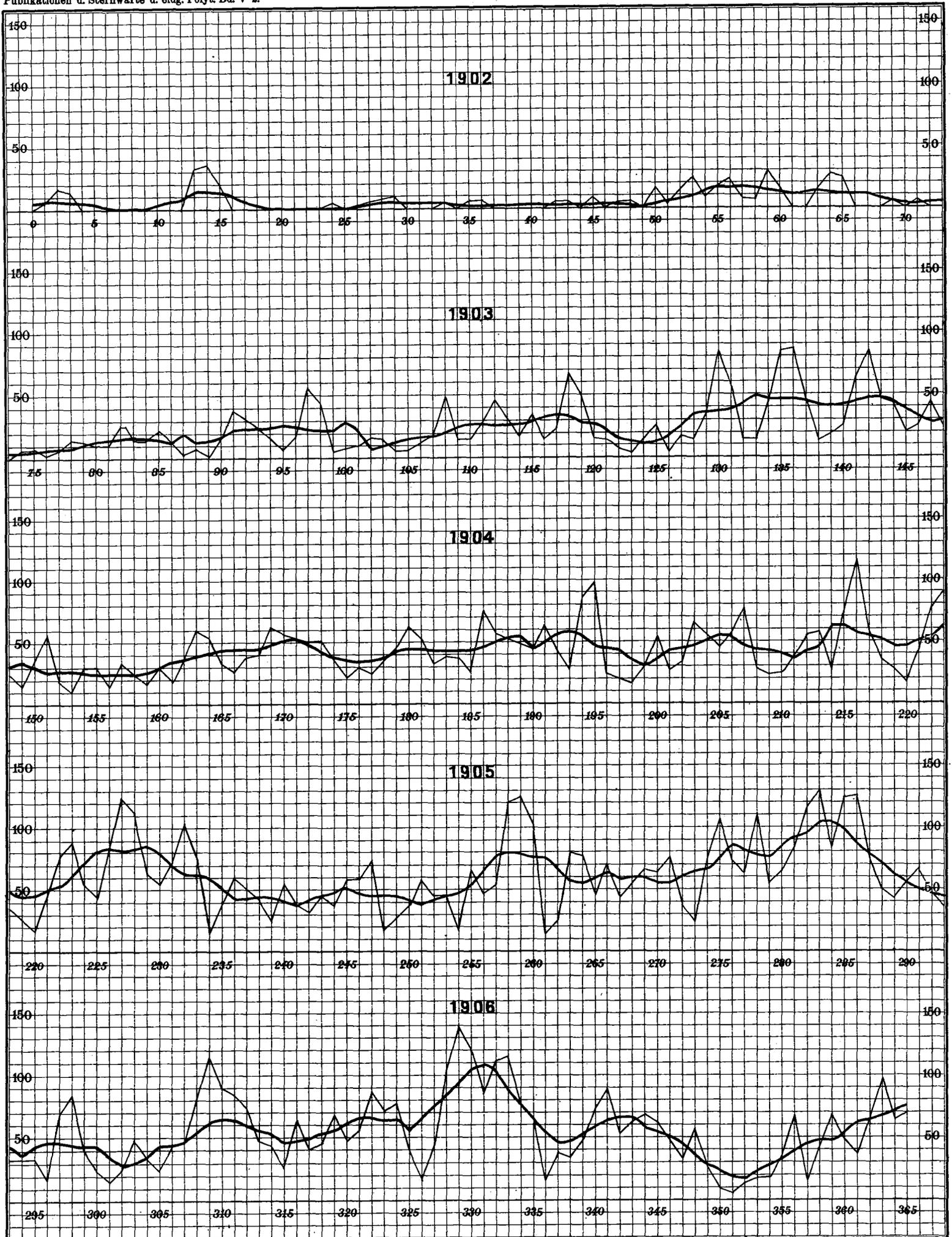
Beobachtete und ausgeglichene Pentadenmittel der täglichen Relativzahlen.

Publikationen d. Sternwarte d. eidg. Polyt. Bd. V 2.



Beobachtete und ausgeglichene Pentadenmittel der täglichen Relativzahlen.

Publikationen d. Sternwarte d. eidg. Polyt. Bd. V 2.



Beobachtete und ausgeglichene Pentadenmittel der täglichen Relativzahlen.

Publikationen d. Sternwarte d. eidg. Polyt. Bd. V 2.

